

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH NIELINIOWYCH MODELI DO OPISU WZROSTU RUTWICY WSCHODNIEJ (*GALEGA ORIENTALIS* LAM.)

Katarzyna Rymuza, Antoni Bombik, Elżbieta Radzka

Wydział Przyrodniczy, Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach
ul. Prusa 14, 08-110 Siedlce
e-mail: katarzyna.rymuza@uph.edu.pl

Streszczenie. W pracy podjęto próbę opisu wzrostu roślin rutwicy wschodniej (*Galega orientalis* Lam.) za pomocą wybranych nieliniowych modeli wzrostu: Gomperta, funkcji logistycznej i Richardsa. Do analizy wykorzystano wyniki z wieloletniego doświadczenia przeprowadzonego na poletkach doświadczalnych Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach. Pomiaru wzrostu rutwicy odmiany Gale dokonywano co 7 dni, od początku wegetacji do pełnej dojrzałości strąków w latach 2009-2012. Długość pędów rośliny kształtowały warunki wegetacji, głównie opady. W sezonach o mniejszej sumie opadów rośliny wytwarzały pędy krótsze. Zastosowane funkcje dobrze opisują dane empiryczne, co potwierdzają skorygowane współczynniki determinacji, które wahały się od 91 do 99% w zależności od rodzaju zastosowanej funkcji i sezonu wegetacyjnego. Najlepsze dopasowanie funkcji do danych empirycznych uzyskano dla funkcji logistycznej. Maksymalne tempo wzrostu roślin rutwicy zależało również od sezonu wegetacyjnego, gdyż wartości dy/dt wyznaczone dla analizowanych krzywych w poszczególnych latach były zbliżone i wahały się od 2,18 centymetrów na dobę w 2012 do 4,04 centymetrów na dobę w 2010 roku.

Słowa kluczowe: rutwica wschodnia, krzywa Gomperta, krzywa logistyczna, krzywa Richardsa, tempo wzrostu

WSTĘP

Rutwica wschodnia (*Galega orientalis* Lam.) jest rośliną wchodzącą w skład rodziny *Fabaceae* Lindl., należy do najmłodszych roślin uprawianych na paszę. Charakteryzuje się dużą zdolnością do biologicznej redukcji azotu cząsteczkowego, dużą zawartością karotenu i białka. Jako roślina paszowa jest powszechnie uprawiana w Estonii, Finlandii, Łotwie oraz w Rosji. W Polsce jest gatunkiem mało znanym. Rutwica to roślina wieloletnia, odporna na wymarzenie. Wcześnie rozpoczyna wegetację, tworząc na szyjkach korzeniowych rozety liściowe. Przy temperaturze minimalnej przekraczającej 5°C wytwarza pędy nadziemne z zimujących szyjek korzeniowych

oraz z 1-letnich kłaczy podziemnych. W zależności od warunków pogodowych na pędach 1-rzędu wytwarza pędy 2 i 3-rzędu, zakończone kwiatostanami w kształcie grona. Wzrost rutwicy, jak każdej innej rośliny, można opisać w sposób matematyczny za pomocą wskaźników lub funkcji. Wzrost jest podstawową właściwością organizmów definiowaną najczęściej jako nieodwracalny przyrost rozmiarów i masy roślin, powstała w wyniku produkcji materii organicznej (Richards 1969, Wereing i Philips 1985, Efe 1990). Odbywa się on w pewnym czasie i kształtowany jest przez różnorodne procesy fizjologiczne, czynniki biotyczne i abiotyczne (Trewavas 1991, Edelmann 1995). Wzrost jest procesem ciągłym i można go opisać modelami matematycznymi. Dotychczas opracowano wiele modeli matematycznych, opisujących przebieg wzrostu roślin lub ich pojedynczych organów. Curry (1971) oraz Curry i Chen (1971) opracowali model matematyczny wzrostu korzenia, łodygi i liści roślin kukurydzy. Baker i in. (1972) stworzyli model wzrostu bawełny, a Pyda (1977) roślin rzepaku.

Odpowiednio dobrany model (funkcja matematyczna) ułatwia porównanie danych doświadczalnych, co niekiedy daje możliwość prognozowania wzrostu roślin. Funkcje, (modele) opisujące zależność wiek-czas, nazywane są krzywymi wzrostu i pozwalają objąć wiele pomiarów w jednym równaniu, opartym na kilku parametrach, które można biologicznie zinterpretować. Do parametrów tych należą: A (wartość asymptotyczna funkcji), B (stała całkowania), K (wskaźnik szybkości wzrostu) i M (parametr punktu przegięcia). Każdy z tych modeli charakteryzuje się innym kształtem wynikającym z różnych punktów przegięcia, które to określają czas i wysokość rośliny w momencie jej najszybszego wzrostu (Gille 2004).

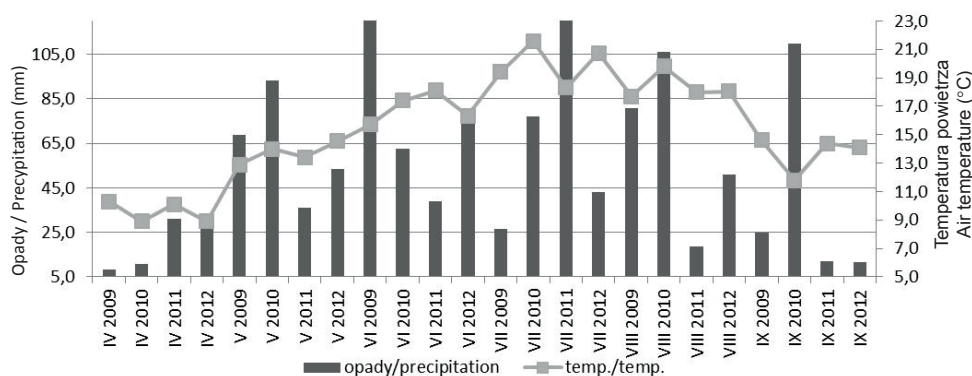
Do najczęściej stosowanych modeli opisujących krzywe wzrostu organizmów żywych należą: krzywa logistyczna, krzywa Gompertza i krzywa Richardsa (Villegas i in. 2001, Damgaard i in 2002, Damgaard i Weiner 2008, Karadavut 2009). Krzywą logistyczną i Gompertza opisują trzy parametry (A, K, M), a punkty przegięcia występują odpowiednio: w połowie i jednej trzeciej wartości asymptotycznej. Krzywa Richardsa jest krzywą czteroparametrową. Tylko w tej funkcji występuje parametr M, określający punkt przegięcia krzywej. W zależności od wielkości parametru M funkcja ta może aproksymować do innych funkcji np.: do funkcji logistycznej, gdy $M = -1$, do funkcji Gompertza, gdy M dąży do nieskończoności lub do funkcji Bertflantego, gdy $M = 3$ (Fitzhugh 1976).

Celem pracy jest porównanie nieliniowych modeli krzywych wzrostu pod względem ich przydatności do opisu wzrostu rutwicy wschodniej (*Galega orientalis* Lam.).

METODYKA

Do opisu wzrostu rutwicy wschodniej (*Galega orientalis* Lam.) odmiany Gale wykorzystano wyniki pochodzące z doświadczenia na poletkach doświadczalnych Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach (52°10.292'N:

022°17'E). Wieloletnie doświadczenie założono w 2004 roku na glebie wytworzonej z piasku gliniastego mocnego. Przedplonem dla rutwicy był jęczmień jary odmiany Damazy.



Rys. 1. Średnia temperatura powietrza i opady atmosferyczne w Zawadach

Fig. 1. Average air temperature and precipitation in Zawadach

Największą średnią temperaturą powietrza i największą sumą opadów atmosferycznych okresu wegetacyjnego charakteryzował się rok 2010. Natomiast najzimniejszy był sezon wegetacyjny 2009 roku a najsuchszy 2011.

W latach 2009-2012 przeprowadzono badania nad dynamiką wzrostu roślin. Pomiarów rozpoczynano po rozpoczęciu wegetacji i wykonywano je co 7 dni, do fazy pełnej dojrzałości strąków. Pomiarów tych dokonywano w terminach od 17.03. do 21.07. 2009 roku, od 18.03 do 25.07.2010 roku, od 14.03 do 20.07. 2011 roku oraz od 26.03 do 04.08.2012 roku.

Do analizy wzrostu wykorzystano funkcje:

- Gompertza: $Y(t) = A \cdot \text{Exp}[-B \cdot \text{Exp}(-Kt)]$,
- Logistyczną: $Y(t) = A[1 + B \cdot \text{Exp}(-Kt)]^{-1}$;
- Richardsa: $Y(t) = A[1 \pm B \cdot \text{Exp}(-Kt)]^M$.

We wzorach tych poszczególne składowe oznaczają: $Y(t)$ – oznacza wysokość rośliny w okresie t – dnia, A – określa asymptotę poziomą funkcji, B – stałą całkowania, K – wskaźnik szybkości wzrostu, M – parametr punktu przegięcia.

Dla każdej analizowanej funkcji określono tempo wzrostu oraz punkt przegięcia zgodnie z formułami zamieszczonymi w tabeli 1.

Estymacji równań wzrostu dokonano, dla każdego sezonu wegetacji oddzielnie, na podstawie średniej wysokości roślin, uzyskanej z 70 losowo wybranych okazów.

Jako kryterium sprawdzające dobroć dopasowania poszczególnych funkcji zastosowano skorygowany współczynnik determinacji R^2 , względny błąd resztowy MRE (Mean Relative Error) oraz średni kwadrat resztowy RMS (Root Mean Square).

Tabela 1. Formuły określające charakterystyczne punkty analizowanych krzywych wzrostu
Table 1. Formulas describing the characteristic points of the analysed growth models

Model Model	Punkt przęgięcia Inflection point		Tempo wzrostu $\frac{dy}{dt}$ Growth rate $\frac{dy}{dt}$
	t_i	$Y(t_i)$	
Gompertza Gompertz function	$\frac{\ln B}{K}$	$\frac{A}{e}$	$K \cdot Y(t) \cdot \ln \left(\frac{Y(t)}{A} \right)^{-1}$
Logistyczna Logistic function	$\frac{\ln B}{K}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{K}{A} \cdot Y(t) \cdot (A - Y(t))$
Richardsa Richards function	$\frac{1}{K} \cdot \ln(B \cdot M)$	$A \cdot \left(\frac{M-1}{M} \right)^M$	$M \cdot K \cdot Y(t) \cdot \left(\left(\frac{Y(t)}{A} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right)$

Skorygowany współczynnik determinacji umożliwia porównanie adekwatności modeli wyznaczonych na podstawie różnej liczby obserwacji i zawierających odmienną liczbę parametrów. Wyrażony jest wzorem (Grabowski 2002):

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1} \cdot (1 - R^2) \quad (1)$$

w którym: n – liczba obserwacji, p – liczba parametrów ocenianego modelu, R^2 – współczynnik determinacji opisany wzorem:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n (y(t) - \bar{y}(t))^2} \quad (2)$$

w którym: e_t – reszta – różnica pomiędzy wartością empiryczną $y(t)$ a teoretyczną $\bar{y}(t)$ zmiennej dla pomiaru t , $e_t = y(t) - \bar{y}(t)$, $\bar{y}(t)$ – średnia arytmetyczna dla wartości empirycznych.

MRE i RMS wyrażony jest wzorami (Smolik 1985):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n (y(t) - \bar{y}(t))^2} \quad (3)$$

$$RMS = \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n-p} \quad (4)$$

Wszystkie obliczenia wykonano z zastosowaniem programu Statistica 12,0 wykorzystując procedurę estymacji nieliniowej z funkcją straty użytkownika oraz arkusza kalkulacyjnego EXCEL.

WYNIKI

Wartości parametrów zastosowanych funkcji do opisu wzrostu roślin rutwicy w kolejnych sezonach wegetacyjnych przedstawiono w tabeli 2. Największą zarówno empiryczną, jak i teoretyczną wysokość roślin (parametr A) uzyskano w 2012 roku, co świadczy o tym, że rok ten był najbardziej sprzyjającym do wzrostu i rozwoju rutwicy. Osiągnięciu największych rozmiarów rośliny nie towarzyszyła największa

teoretyczna szybkość wzrostu. Największy teoretyczny dobowy przyrost wysokości roślin zaobserwowano w drugim sezonie wegetacyjnym (w 2011 roku), o czym świadczy tempo wzrostu oscylujące w granicach $4 \text{ cm} \cdot \text{doba}^{-1}$. Z równań wzrostu oraz wysokości empirycznych wynika, że w pierwszym roku wegetacji asymptotyczne teoretyczne wartości wyznaczone na podstawie funkcji Richardsa były najbardziej zbliżone do wartości empirycznych. W drugim sezonie najbardziej zbliżone do osiągniętej maksymalnej wysokości roślin były parametry A wyznaczone przy pomocy funkcji Richardsa i Gompertza, które wynosiły 107,38 cm. W ostatnim sezonie badań największe różnice pomiędzy wysokością asymptotyczną a maksymalną teoretyczną stwierdzono w przypadku funkcji Richardsa (tab. 2).

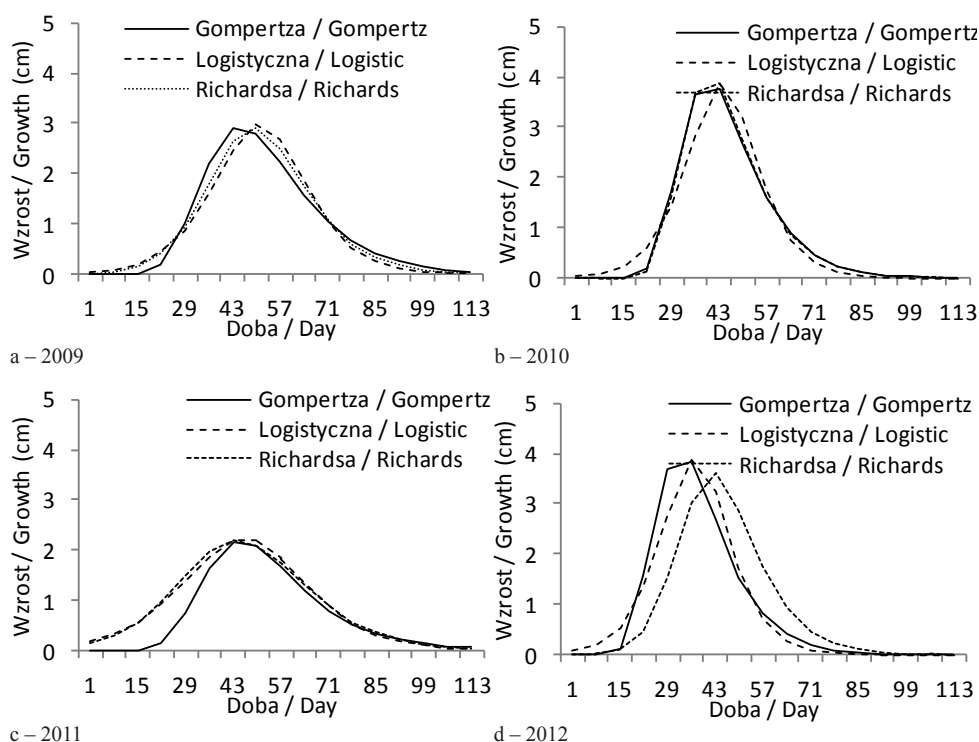
Tabela 2. Maksymalne empiryczne wysokości roślin, teoretyczne równania wzrostu, wartości punktów przegięcia oraz maksymalne teoretyczne tempo wzrostu roślin rutwicy w latach (sezonach badań)

Table 2. Maximum empirical plant heights, theoretical growth equations, values of inflection points and maximum theoretical growth rates of goat's rue plants in the study years (research seasons)

Sezon Season	Wysokość Empirical height	Funkcja Function	Równania wzrostu Growth rate equation	tI (doba day)	Y(tI) (cm)	dt/dy ($\text{cm} \cdot \text{doba}^{-1}$ cm day^{-1})
2009	107,03	Gompertza	$Y(t) = 109,97 \text{Exp}[-\text{Exp}(27,03-0,073t)]$	45,25	40,45	2,93
		Logistyczna	$Y(t) = 107,70 [1+295,20 \cdot \text{Exp}(-0,11t)]^{-1}$	50,99	53,83	2,99
		Richardsa	$Y(t) = 108,84 [1+57,76 \cdot \text{Exp}(-0,09t)]^{-1,72}$	49,12	49,48	2,92
2010	107,69	Gompertza	$Y(t) = 108,03 \cdot \text{Exp}[-\text{Exp}(50,78-0,098t)]$	39,73	39,75	3,93
		Logistyczna	$Y(t) = 106,66 [1+601,24 \cdot \text{Exp}(-0,15t)]^{-1}$	43,94	53,33	3,76
		Richardsa	$Y(t) = 107,71 [1+0,08 \cdot \text{Exp}(-0,10t)]^{-724,9}$	39,90	39,66	4,04
2011	104,19	Gompertza	$Y(t) = 110,46 \cdot \text{Exp}[-\text{Exp}(8,07-0,054t)]$	38,76	40,64	2,19
		Logistyczna	$Y(t) = 107,15 [1+48,29 \cdot \text{Exp}(-0,08t)]^{-1}$	46,18	53,58	2,20
		Richardsa	$Y(t) = 107,91 [1+18,19 \cdot \text{Exp}(-0,07t)]^{-1,46}$	44,33	50,37	2,18
2012	110,6	Gompertza	$Y(t) = 105,11 \cdot \text{Exp}[-\text{Exp}(30,15-0,10t)]$	32,82	38,67	3,96
		Logistyczna	$Y(t) = 104,29 [1+260,05 \cdot \text{Exp}(-0,15t)]^{-1}$	37,10	52,15	3,58
		Richardsa	$Y(t) = 148,59 [1-1,04 \cdot \text{Exp}(-0,04t)]^{2,98}$	28,28	43,94	2,51

Punkty przegięcia określające teoretyczny czas i wysokość rośliny w fazie jej najszybszego wzrostu wyznaczone na podstawie zastosowanych funkcji różniły się w poszczególnych sezonach wegetacyjnych. W latach, które charakteryzowały się mniejszą ilością opadów, rośliny wytwarzały krótsze pędy (rys.1). Najwcześniejszy teoretyczny punkt przegięcia stwierdzono w przypadku funkcji Gompertza w trzech pierwszych latach prowadzenia eksperymentu, który w zależności od sezonu wegetacyjnego przypadał pomiędzy 38 a 45 dniem wegetacji przy wysokości roślin wahającej się od 40 do 47 cm i przyrostem od 2,19 do 3,93 cm na dobę. Równania wzrostu wyznaczone przy pomocy funkcji logistycznej wskazują, że maksymalny wzrost roślin przypadał (w zależności od sezonu wegetacyjnego) pomiędzy 37 a 51 dniem wegetacji. Rośliny przyrastały wówczas średnio od 2,20 do 3,76 cm na dobę. Stosując funkcję Richardsa, wykazano, że teoretyczny dzień w którym nastąpił maksymalny wzrost roślin przypadał w zależności od sezonu wegetacyjnego pomiędzy 28 a 49 dniem wegetacji, a przyrost ten wynosił od 2,18 do 4,04 cm na dobę (tab. 2).

Różnice we wzroście roślin w poszczególnych latach potwierdzają równania szybkości wzrostu (Rys. 2). W pierwszym, drugim i trzecim roku badań tempo wzrostu roślin rutwicy opisane funkcją Richardsa i logistyczną było bardzo podobne, a w drugim sezonie (2010) wykresy funkcji pokryły się. W ostatnim roku badań (2012) otrzymane teoretyczne równania szybkości wzrostu znacznie się różniły zarówno pod względem dnia, w którym nastąpił najszybszy wzrost, jak i pod względem tempa wzrostu. W przypadku opóźnienia wegetacji i mniejszej ilości opadów rośliny charakteryzowały się mniejszym tempem wzrostu, wytwarzając krótsze pędy.



Rys. 2.-Przebieg szybkości wzrostu wyznaczony na podstawie wybranych funkcji w sezonach
Fig. 2. Equations of growth rate in the study years calculated based on selected functions

Wartości współczynników opisujących dopasowanie uzyskanych krzywych do danych empirycznych przedstawiono w tabeli 3. Wartości skorygowanych współczynników determinacji wahały się od 91,0 do 99,9%, w zależności od sezonu wegetacji i zastosowanej funkcji. Największe wartości tego współczynnika dla wszystkich funkcji otrzymano w pierwszym i drugim sezonie wegetacji tj. w latach 2009 i 2010. W następnych latach dopasowanie wyestymowanych równań wzrostu do danych empirycznych było nieco gorsze. W trzecim roku badań

najgorzej aproksymowała funkcja Gompertza ($\bar{R}^2 = 95,3\%$), zaś w czwartym funkcja Richardsa ($\bar{R}^2 = 91,0\%$). Można zauważyć, że w sezonach w których zarówno funkcja Gompertza, jak i logistyczna najgorzej dopasowywały się do danych empirycznych, funkcja Richardsa aproksymowała wartości na poziomie 99,9%. Najlepsze dopasowanie danych teoretycznych do empirycznych uzyskano po zastosowaniu funkcji logistycznej, co potwierdzają wartości błędów MRE i RMS (tab. 3).

Tabela 3. Wartości współczynników dopasowania estymowanych funkcji do danych empirycznych
Table 3. Values of adjustment coefficients of the estimated functions to empirical data

Funkcja Function	Sezon wegetacji Growing season	\bar{R}^2 (%)	MRE	RMS
Gompertza Gompertz f.	2009	99,8	0,03	6,40
	2010	99,6	0,41	6,54
	2011	95,3	1,55	77,64
	2012	99,5	0,41	7,03
Logistyczna Logistic f.	2009	99,9	0,03	5,62
	2010	99,8	0,40	4,66
	2011	95,9	1,51	68,6
	2012	99,6	0,35	4,41
Richardsa Richards f.	2009	99,9	0,01	0,92
	2010	99,6	5,26	5,26
	2011	99,9	0,15	0,51
	2012	91,0	1,72	146,5

Teoretyczne wysokości roślin wyznaczone na podstawie funkcji Gompertza są w większości przypadków mniejsze od wartości empirycznych (tab. 4).

Tabela 4. Wielkości odchyłeń teoretycznych wysokości roślin od wyznaczonych na podstawie zastosowanych modeli wartości empirycznych

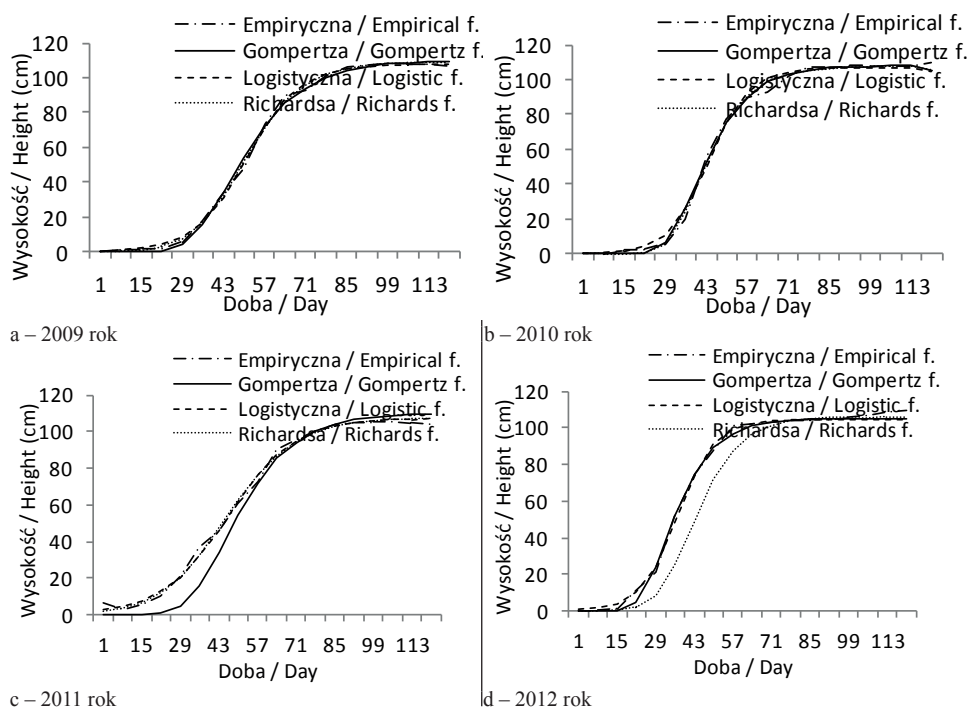
Table 4. Values of theoretical deviations of plant heights from the empirical values determined on the basis of the applied models

2009			2010			2011			2012		
G*	L*	R*	G	L	R	G	L	R	G	L	R
0,44	-0,41	0,29	0,04	-0,20	0,20	1,06	-2,31	0,77	0,16	-0,46	0,45
1,10	-0,88	0,54	0,11	-0,57	0,57	2,65	-4,17	0,97	0,22	-1,31	1,25
1,41	-1,90	0,90	1,86	-1,55	1,55	5,46	-7,27	1,01	0,84	-3,48	3,26
1,05	-3,61	1,27	2,03	-3,86	3,98	9,34	-11,96	0,75	5,84	-4,95	7,69
1,67	-4,34	1,27	-0,15	-4,87	5,70	17,21	-16,29	0,11	-2,75	-0,06	15,27
2,63	-1,57	0,46	-5,43	-0,09	1,19	21,23	-16,52	-0,63	0,14	3,44	23,34
0,33	2,54	-0,84	3,55	2,68	-2,29	12,22	-12,61	-0,96	-0,09	0,50	25,32
-6,38	3,34	-1,18	2,55	-0,26	0,06	6,74	-7,89	-0,62	-1,17	-2,22	19,49
1,00	0,68	-0,14	-0,40	-2,70	2,36	1,06	-4,46	0,08	4,54	-2,33	11,52
4,40	-2,02	0,92	-6,12	-2,56	2,33	4,97	-2,34	0,62	1,43	-1,40	5,52
-1,89	-2,88	1,11	-1,54	-1,40	1,33	1,14	-0,94	0,78	0,46	-0,50	1,98
1,29	-2,32	0,70	1,18	-0,32	0,39	-0,27	0,08	0,65	-0,36	0,09	0,10
2,63	-1,24	0,13	0,40	0,42	-0,25	-0,08	0,87	0,38	-0,45	0,44	-0,84
0,75	-0,19	-0,34	0,48	0,85	-0,62	-1,59	1,47	0,09	-0,59	0,63	-1,30
0,03	0,64	-0,67	0,38	1,10	-0,83	-2,80	1,90	-0,16	0,59	0,73	-1,51
-0,62	1,22	-0,88	0,12	1,23	-0,94	-3,62	2,21	-0,35	1,74	0,78	-1,62
-1,21	1,62	-1,01	-0,27	1,30	-1,00	-4,33	2,42	-0,49	3,81	0,80	-1,67
-2,46	1,87	-1,09	0,04	-0,20	0,20	-5,30	2,56	-0,58	4,50	0,82	-1,69

* G – funkcja Gompertza, L – funkcja logistyczna, R – Funkcja Richardsa

Funkcja ta nie doszacowuje wartości w początkowej fazie wzrostu i przeszacowuje je w ostatniej fazie wzrostu. Funkcja logistyczna w trzech sezonach przeszacowywała wartości empiryczne w początkowej i końcowej fazie wzrostu rośliny. Funkcja Richardsa nie doszacowywała większość wartości w drugim sezonie wegetacji i przeszacowywała wartości w czwartym sezonie wegetacji.

Średni kwadrat resztowy oraz względny błąd resztowy wskazują, że dla danych uzyskanych w pierwszym i trzecim sezonie wegetacji najlepsze dopasowanie wartości teoretycznych do empirycznych uzyskano po zastosowaniu funkcji Richardsa i logistycznej, najmniejsze zaś po zastosowaniu funkcji Gompertza. Najlepsze dopasowanie danych teoretycznych do empirycznych uzyskano w trzecim sezonie wegetacji dla funkcji Gompertza oraz w czwartym sezonie badań dla funkcji Richardsa, o czym świadczą wartości odchyień funkcji teoretycznych od danych empirycznych wynoszące nawet 16,52 cm (tab. 4, rys. 3).



Rys. 3. Dopasowanie estymowanych funkcji do danych empirycznych

Fig 3. Fit of estimated functions to the empirical data in individual study years

DYSKUSJA

Rozwój nauki, a przede wszystkim rozwój techniki komputerowej sprawił, że większość procesów zachodzących w rzeczywistości zaczęto opisywać przy pomocy funkcji matematycznych. Jednym z takich procesów jest wzrost organizmów żywych. Jak dotąd powstało wiele nieliniowych funkcji wzrostu opartych o różną liczbę parametrów opisujących zależność wzrost-czas. Krzywe te są krzywymi teoretycznymi, które w mniejszym lub większym stopniu dopasowują się do danych rzeczywistych. W przypadku roślin rutwicy wartości rzeczywiste w dużym stopniu warunkowane są przez warunki pogodowe, głównie zaś opady, gdyż roślina ta ma dość wysokie wymagania wodne (Maripöld 2006).

Równania matematyczne zastosowane w niniejszej pracy do oceny wzrostu roślin rutwicy dobrze opisują dane empiryczne, co potwierdzają wartości współczynników determinacji w zakresie od 99,1 do 99,6%. Są one nieco wyższe niż uzyskane przez Gunartha (1995), a które wynosiły 0,91% dla funkcji logistycznej i 0,80 dla funkcji Gompertza. Wielu autorów zajmujących się badaniem wzrostu różnych roślin otrzymało natomiast podobne wartości miar dopasowania. Dla roślin pszenicy ozimej Karadavut (2008) otrzymał średni błąd resztowy na poziomie od 6,29 do 10,78 w zależności od zastosowanej funkcji, a dla kukurydzy (2010) współczynniki determinacji wynoszące od 88 do 99%. Bakoglu i in. (2016) w doświadczeniu z wyką uzyskali współczynniki dopasowania funkcji do danych empirycznych wahające się od 88 do 99,4%.

Wśród zastosowanych funkcji generalnie najlepsze dopasowanie do danych empirycznych wykazała funkcja Richardsa, która jest funkcją bardzo „elastyczną” i w zależności od wartości parametru M może przechodzić w każdą inną funkcję. Przypadek taki zdarzył się w drugim roku badań, gdy parametr M w funkcji Richardsa dążył do nieskończoności. Funkcja ta w przekształciła się w funkcję Gompertza, co potwierdzają parametry tych funkcji (wartości asymptotyczne, punkty przegięcia maksymalne tempa wzrostu) oraz wykresy szybkości wzrostu, które się pokrywają.

Matematyczny opis zakończonego procesu wzrostu może przyczynić się do poznania wzrostu rośliny, wskazywać terminy optymalnej interwencji agrotechnicznej, pomagać w prognozowaniu plonów, a także wskazywać różnice morfologiczno-rozwojowe pojedynczych osobników lub całej populacji (Witkowicz 2003).

WNIOSKI

1. Zastosowane funkcje dobrze aproksymują wartości teoretyczne do danych empirycznych, co potwierdzają wysokie skorygowane współczynniki determinacji opisujące dopasowanie wyznaczonych równań wzrostu do danych eksperymentalnych.

2. W czteroleciu najlepsze dopasowanie funkcji do danych empirycznych otrzymano dla funkcji logistycznej, co potwierdzają najmniejsze i najmniej zróżnicowane wartości zarówno średniego błędu rentowego, jak i względnego błędu.

3. Najmniejsze maksymalne teoretyczne wysokości roślin uzyskano po zastosowaniu funkcji logistycznej, uzyskując jednocześnie dla niej największe współczynniki szybkości wzrostu oraz wartości punktu przegięcia funkcji.

4. Tempo wzrostu roślin rutwicy osiągnięte w momencie najszybszego wzrostu zależało głównie od sezonu wegetacyjnego, gdyż jego wartości wyznaczone dla analizowanych krzywych były zbliżone i wahały się od 2 do ponad 4 centymetrów na dobę.

PIŚMIENNICTWO

- Adil Bakoglu A., Celik S., Kokten K., Kilic O., 2016. Examination of plant length, dry stem and dry leaf weight of bitter vetch [*Vicia ervilia* (L.) Willd.] with some non-linear growth models. Legume Research 39 (4), 533-542, doi:10.18805/lr.v0iOF.11182
- Baker D.N., Hesketh J.D., Duncan W.G., 1972. Simulation of growth and yield in cotton. Gross photosynthesis, respiration at growth. Crop. Sci., 12, 431-435, doi:10.2135/cropsci1972.0011183X001200040010x
- Curry R.B., 1971. Dynamic simulation of plant growth. Part I. Development of a model. Trans. ASAE., 14, 946-959, doi:10.13031/2013.38428
- Curry R.B., Chen L.H., 1971. Dynamic simulation of plant growth. Part II. Incorporation of actual daily weather and partitioning of net photosynthate. Trans. ASAE, 14, 1170-1174, doi:10.13031/2013.38478
- Edelmann H.G., 1995. Wall extensibility during hypocotyl growth: a hypothesis to explain elastic-induced wall loosening. Physiol. Plant. 95, 296-303, doi:10.1111/j.1399-3054.1995.tb00841.x
- Efe E., 1990. Growth Curves. CU Institute of Basic and Applied Sciences. Department of Animal Science. Ph.D. Thesis. Ankara.
- Fitzhugh H.A., 1976. Analysis of Growth and Strategies for Altering Their Shape. J. Anim. Sci, 42, 1036-1051, doi:10.2527/jas1976.4241036x
- Gille U., 2004. Analysis of Growth. Pobrano: 03.09.2010 z <http://www.uni-leipzig.de/~vetana/growththe.htm>.
- Grabowski R.J., 2002. Ekonometria w zarysie, WSiFZ, Białystok.
- Gunartha L., 1995. Mechanistic models in lettuce growth. Ph. D. Thesis. University of Sidney. Australia.
- Karadavut U., 2008. Non linear models for growth curves of triticale plants under irrigation conditions. Turkish J. of Field Crops, 4(2), 105-110.
- Karadavut, U., Palta Ç., Kökten K., Bakoğlu A., 2010. Comparative study on some non-linear growth models for describing leaf growth of maize. Int. J. Agric. Biol., 12, 227-230

- Meripõld H., 1994. The dependence of fodder galega's seed yield on sowing rate and row space Fodder Galega (*Galega orientalis* Lam.), Research in Estonia, Saku, Eston. Research Ist. Og. Agric., 3-34.
- Pyda M., 1977. Matematyczny model wzrostu rzepaku. Mathematical model of rape growth. Nowe Rol., 5, 12-13.
- Richards F.J., 1969. A flexible growth function for empirical use. Journ. Exp. Bot., 10, 290-300, doi:10.1093/jxb/10.2.290
- Trewavas A.J., 1991. How do plant growth substances work? Plant Cell Environ. 14, 1-12, doi:10.1111/j.1365-3040.1991.tb01366.x
- Villegas D., Aparicio N., Blanco R., Royo C., 2001. Biomass accumulation and main stem elongation of durum wheat grown under Mediterranean conditions. Ann of Bot., 88, 617-627, doi:10.1006/anbo.2001.1512
- Wereing P.F., Philips I.D.J., 1985. Wzrost i różnicowanie się roślin. PWN, Warszawa
- Witkiewicz R., 2003. Badanie wzrostu i rozwoju seradela (*Ornithopus sativus* Brot) w zależności od doboru roślin ochronnych i elementów agrotechniki. Zastosowanie metod statystycznych w badaniach naukowych II. Stat Soft. Kraków.

APPLICATION OF SELECTED NON-LINEAR FUNCTIONS TO DESCRIBE ORIENTAL GOAT'S RUE (*GALEGA ORIENTALIS* LAM.) GROWTH

Katarzyna Rymuza, Antoni Bombik, Elżbieta Radzka

Faculty of Natural Sciences, Siedlce University of Natural Sciences and Humanities
ul. Prusa 14, 08-110 Siedlce, Poland
e-mail: katarzyna.rymuza@uph.edu.pl

Summary. In the study it was attempted to describe the growth of oriental goat's rue (*Galega orientalis* Lam.) by means of a logistic function, Gompertz function and Richards function. Analysis of data was based on measurements of stem lengths of oriental goat's rue (*Galega orientalis* Lam.) cv. Gale which were taken during a four-year period as part of a long-term experiment set up in 2009 at the experimental site of the University of Natural Sciences and Humanities. From 2009 to 2012, 70 plants were randomly selected every seven days from the start of growth to the stage of full maturity of pods. The beginning of growth was assumed to be the moment of forming leaf buds on root necks of the plants which overwintered. The study demonstrated that the functions described the empirical data well as the coefficients of determination obtained ranged from 9 to 99%, depending on the growing season. The estimated function parameters indicate that both plant height and growth rate were affected by thermal conditions and moisture during the growing season. The maximum growth rate ranged from 2.18 to 4.04 cm per day. Also the inflection point, the point at which plants grew the fastest, depended on the conditions of the growing season.

Keywords: oriental goat's rue, Gompertz function, logistic function, Richards function, growth rate