

MAKRO- I MIKROSKOPOWE MODELE MATERIAŁÓW SYPKICH

Józef Horabik, Marek Molenda

Institut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN, ul. Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27
e-mail: jhorabik@demeter.ipan.lublin.pl

Streszczenie. W pracy omówiono makro- i mikroskopowe modele konstytutywne materiałów sypkich. Przeanalizowano najczęściej stosowane warunki plastyczności i prawa plastycznego płynięcia uwzględniające oddziaływania w skali makro- bądź mikro. Podano przykłady praktycznych zastosowań do opisu zjawisk zachodzących w materiałach sypkich pochodzenia biologicznego, podkreślając konieczność rozszerzenia zakresu eksperymentalnej weryfikacji oraz zwrócenia szczególnej uwagi na dużą odkształcalność ziaren ośrodka.

Słowa kluczowe: materiał sypki, modele konstytutywne

WSTĘP

Materiały sypkie występują wszędzie: w przyrodzie, w przemyśle, w kuchni. Klasycznym przykładem materiału sypkiego jest piasek. Jedną z większych grup materiałów sypkich stanowią surowce i produkty spożywcze. Prawidłowe i efektywne ich przetwarzanie wymaga gruntownej wiedzy o właściwościach fizycznych i prawach rządzących zachowaniem się tych materiałów. Wiedza ta nadal jest niezadowalająca. Jednym z istotniejszych zagadnień jest doskonalenie związków konstytutywnych opisujących zależność naprężenie-odkształcenie [22].

Materiały sypkie wyraźnie odróżniają się od powszechnie znanych stanów skupienia materii: gazów, cieczy i ciał stałych. Często określane są jako oddzielny stan skupienia materii [10]. Na poparcie tego poglądu wskazywane są trzy charakterystyczne oddziaływania:

- istnienie tarcia statycznego,
- niesprężyste zderzenia,
- praktycznie zerowa energia ruchów termicznych kT w porównaniu do energii potencjalnej pola grawitacyjnego mgd .

Jeśli ilość energii dostarczanej do materiału sypkiego jest wystarczająca do pokonania sił grawitacji i oporów tarcia zachowuje się on podobnie do cieczy. W przypadku ustania dopływu energii materiał sypki praktycznie natychmiast nabiera cech fazy stałej na skutek istnienia tarcia, rozpraszania energii podczas zderzeń oraz obecności sił grawitacji.

Charakterystyczną cechą materiałów sypkich w fazie stałej jest znikoma wartość bądź całkowity brak wytrzymałości na rozciąganie. Podczas działania naprężeń ściskających materiały te charakteryzuje znaczna ściśliwość, a podczas deformacji postaciowej zmienna wytrzymałość na ścinanie zależna od wstępnego zagęszczenia [14]. Materiał luźny podczas ścinania zagęszcza się, a jego sztywność wzrasta, natomiast materiał zagęszczony rozluźnia się, a naprężenie styczne początkowo gwałtownie rośnie, po czym maleje.

Na przestrzeni lat dokonywał się systematyczny rozwój modeli materiałów sypkich: od warunku plastyczności Coulomba, poprzez model plastyczności uwzględniający wzmocnienie i osłabienie, do stopniowego włączania elementów mikrostruktury – obrotów ziaren w modelu ośrodka mikropolarnego, bądź rozkładu punktów styku oraz sił w punktach styku losowego układu ziaren w modelach mikrostrukturalnych.

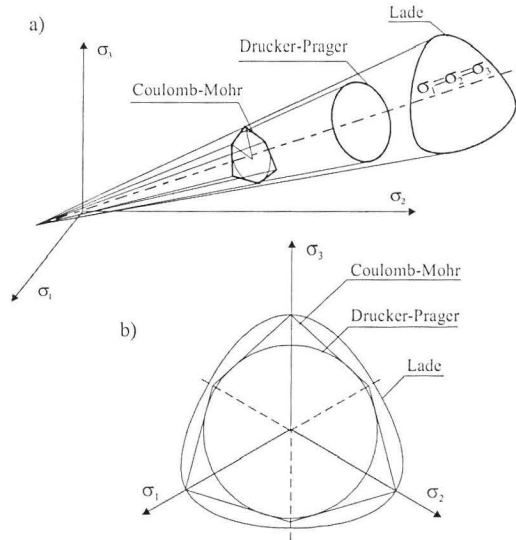
W pracy omówiono najczęściej stosowane modele konstytutywne materiałów sypkich zwracając szczególną uwagę na możliwości ich wykorzystania do opisu oddziaływań w materiałach pochodzenia biologicznego.

MODELE MAKROSKOPOWE

Punktem wyjścia modeli makroskopowych, korzystających z formalizmu mechaniki ośrodków ciągłych, jest sformułowanie warunku przejścia materiału ze stanu sprężystego lub sztywnego w stan plastyczny – tzw. warunku plastyczności. W przypadku materiału nie wykazującego efektów kierunkowych warunek plastyczności zależy tylko od stanu naprężenia:

$$F(\sigma_{ij}) = 0. \quad (1)$$

W przestrzeni naprężeń głównych σ_1 , σ_2 , σ_3 warunek plastyczności przedstawia pewną zamkniętą powierzchnię, która oddziela stany sprężyste ciała lub stany ciała idealnie sztywnego ($F < 0$) od stanów plastycznych ($F = 0$) (rys. 1).



Rys. 1. Warunki plastyczności: Coulomba-Mohra, Druckera-Pragera oraz Ladego: a – w przestrzeni naprężeń głównych, b – na płaszczyźnie oktaedrycznej
Fig. 1. Schematic of Coulomb-Mohr, Drucker-Prager and Lade failure surfaces: a – in the principal stresses space, b – in an octahedral plane

W przypadku materiałów sypkich do bardziej rozpowszechnionych warunków plastyczności należą: warunek Coulomba-Mohra, Druckera-Pragera oraz Ladego [5,12]. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra stanowi liniową relację pomiędzy największym i najmniejszym naprężeniem głównym. Warunek ten można zapisać jako układ sześciu równań, z których dwa pierwsze mają następującą postać:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi + 2c \cos \varphi, \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi,\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie: φ oznacza kąt tarcia wewnętrznego zaś c kohezję. W przestrzeni naprężeń głównych reprezentuje go ostrosłup o potrójnej symetrii osiowej, którego oś pokrywa się z osią naprężenia izotropowego.

Warunek plastyczności Druckera-Pragera wyrażony poprzez pierwszy niezmiennik tensora naprężenia I_1 oraz drugi niezmiennik dewiatora naprężenia J_2 ma postać:

$$F = J_2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \alpha I_1 - k = 0, \quad (3)$$

gdzie: α i k przedstawiają parametry materiałowe. Warunek ten w przestrzeni naprężeń głównych ma kształt stożka obrotowego o osi pokrywającej się z osią naprężenia izotropowego $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, zaś jego wierzchołek znajduje się w punkcie o współrzędnych $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k/\alpha$.

Z kolei warunek plastyczności Ladego stanowi relację pierwszego i trzeciego niezmiennika tensora naprężenia (I_1 i I_3)

$$F = I_1^3 + \chi I_3 - k = 0, \quad (4)$$

a w przestrzeni naprężeń głównych ma kształt stożka o gładkiej krzywoliniowej podstawie z potrójną symetrią osiową.

Częstym problemem jest rozstrzygnięcie, który warunek plastyczności najlepiej zastosować do materiałów pochodzenia biologicznego. W obliczeniach numerycznych wygodniej jest stosować warunek Druckera-Pragera niż warunek Coulomba-Mohra ze względu na niejednoznaczność kierunku normalnej na krawędziach ostrosłupa reprezentującego ten ostatni. Z drugiej jednak strony sformułowanie warunku plastyczności jako relacji pomiędzy największym i najmniejszym naprężeniem głównym, jak w przypadku warunku Coulomba-Mohra, wydaje się być lepszym odwzorowaniem rzeczywistego stanu materiału, w którym dochodzi do wyczerpania wytrzymałości. W celu jednoznacznego rozstrzygnięcia niezbędne są szczegółowe badania kształtu warunku plastyczności na płaszczyźnie oktaedrycznej (rys. 1b).

Prawo plastycznego płynięcia

Teoria plastycznego płynięcia zakłada istnienie w przestrzeni naprężeń potencjału plastycznego $G(\sigma_{ij})$. Związek między składowymi tensora prędkości odkształcenia plastycznego a składowymi tensora naprężenia nazywany jest prawem plastycznego płynięcia

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5)$$

gdzie: $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ - tensor prędkości odkształcenia plastycznego,
 λ - nieujemny współczynnik.

Tensor prędkości odkształcenia plastycznego jest normalny do powierzchni reprezentującej potencjał plastyczny G . Jeżeli potencjał G utożsamimy z warunkiem plastyczności F , $F \equiv G$, wtedy mówimy o tzw. stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia. Pierwsze obszerne opracowanie fenomenolo-

gicznej teorii plastycznego płynięcia materiałów sypkich przedstawili Drucker i Prager [5]. Konstruowane warunki plastycznego płynięcia na ogół ujmują tylko pewien aspekt plastycznej deformacji. Bardziej realistycznego opisu dostarczają modele uwzględniające wzmocnienie materiału [14]. Przyjmuje się w nich, że materiał posiada nie jeden warunek plastyczności lecz całą ich rodzinę

$$F(\sigma_{ji}, \rho) = 0. \quad (6)$$

Parametrem wzmocnienia jest najczęściej gęstość materiału ρ zależna od największego naprężenia głównego $\rho(\sigma_I)$. Największy wkład w rozwój modelu materiału sypkiego ze wzmocnieniem i osłabieniem wniósł Roscoe [19].

Materiały sypkie określane są często jako przyrostowo nieliniowe. Oznacza to, że sztywność materiału jest zależna nie tylko od aktualnego stanu naprężenia, ale również od drogi obciążenia. Uogólnionego opisu zależności pomiędzy przyrostem naprężenia a przyrostem odkształcenia dostarcza model materiału hypoplastycznego. Nieliniowy związek konstytutywny opisuje zmiany naprężenia w szerokim zakresie zmian gęstości, na różnych drogach obciążenia, przed i po wyczerpaniu wytrzymałości [6,21].

Ośrodek mikropolarny

Uwzględnienie obrotów ziaren jako elementów mikrostruktury materiału umożliwia model ośrodka mikropolarnego. W modelu tym każdy element ośrodka jest małą sztywną bryłą. Deformacja opisana jest nie tylko przez wektor przemieszczenia, ale również przez wektor obrotu. Wzajemne oddziaływanie pomiędzy elementami struktury materiału odbywa się nie tylko poprzez wektor siły, ale i przez wektor momentu siły. W materiale działają naprężenia siłowe i naprężenia momentowe. Gradienty obrotów powodują krzywizny, które połączone są z naprężeniami momentowymi. Tensory naprężeń i odkształceń są przez to niesymetryczne, a prawo konstytutywne jest powiększone o tzw. długość charakterystyczną. Sformułowana przez braci E. i F. Cosseratów [18] teoria niesymetrycznej sprężystości uległa znacznemu rozszerzeniu i obecnie znajduje zastosowanie również do modelowania materiałów sypkich. Zaproponowany przez Mühlhausa [15] model mikropolarnego materiału sypkiego, rozszerzający niestowarzyszone sprężysto-plastyczne prawo Druckera-Pragera z izotropowym wzmocnieniem i osłabieniem o obroty Cosseratów, umożliwia modelowanie szerokiej grupy operacji wykonywanych na materiałach sypkich.

Modele materiałów sypkich pochodzenia roślinnego

Spośród modeli znajdujących szersze zastosowanie do materiałów sypkich pochodzenia biologicznego należy wymienić model Ghaboussi i Momena oraz model Ladego zastosowane przez Zhanga i in. [23] do opisu zachowania się masy ziarna pszenicy w złożonym stanie naprężenia. Przyrost odkształcenia $d\varepsilon_{ij}$ traktowany jest jako suma przyrostu odkształcenia sprężystego $d\varepsilon_{ij}^e$ oraz przyrostu odkształcenia plastycznego $d\varepsilon_{ij}^p$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (7)$$

Moduł sprężystości E_u jest potęgową funkcją mniejszego naprężenia głównego σ_3 :

$$E_u = KP_a (\sigma_3/P_a)^n, \quad (8)$$

gdzie: K – współczynnik sprężystości,

n – wykładnik potęgi,

P_a – ciśnienie atmosferyczne.

Przejście w stan plastyczny opisuje warunek plastyczności Druckera-Pragera [5] dla materiału bezkohezyjnego

$$F(\sigma_{ij}) = J_2 - Y^2 I_1^2 = 0, \quad (9)$$

gdzie Y jest stałą uplastycznienia. Potencjał plastyczny jest takiego samego kształtu jak warunek plastyczności i uwzględnia dodatkowo izotropowe i kinematyczne wzmocnienie:

$$G(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \kappa) = 0, \quad (10)$$

gdzie: α_{ij} – tensor wzmocnienia kinematycznego,

κ – parametr wzmocnienia izotropowego.

W sumie model zawiera 3 parametry opisujące sprężystość, 3 parametry wzmocnienia kinematycznego i 2 parametry wzmocnienia izotropowego. Model poprawnie opisuje wszystkie zjawiska typowe dla materiału sypkiego ze wzmocnieniem pośrednim, zawierającym elementy zarówno wzmocnienia izotropowego jak i kinematycznego, a w szczególności dobrze opisuje: anizotropię materiału, histerezę występującą w cyklu obciążenie-odciążenie oraz ewolucję pętli histerezy w trakcie wielokrotnych obciążeń.

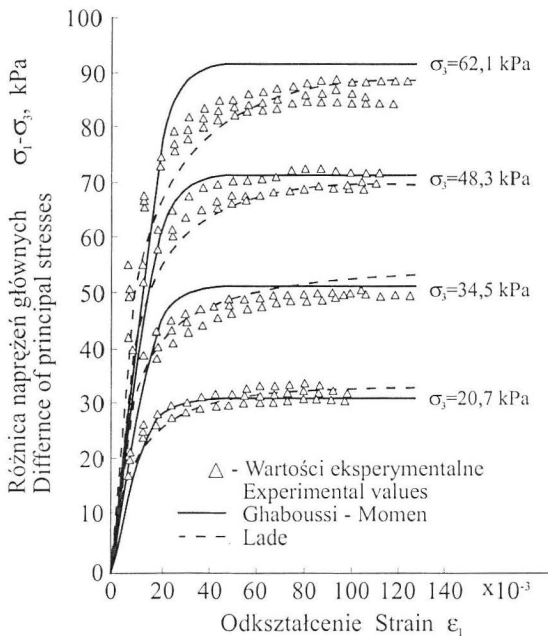
Stosując z kolei warunek plastyczności Ladego [12] do opisu zachowania się ziarna pszenicy Zhang i in. [23] założyli, że w złożonym stanie naprężenia

przyrost całkowitego odkształcenia powstający w wyniku przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$ jest sumą trzech składników: przyrostu odkształcenia sprężystego $d\varepsilon_{ij}^e$ oraz dwóch składowych odkształcenia plastycznego: powstającego w wyniku zagęszczenia materiału $d\varepsilon_{ij}^c$ oraz powstającego w wyniku dylatacji $d\varepsilon_{ij}^d$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^d. \quad (11)$$

Rozdzielenie przyrostu odkształcenia plastycznego na dwa niezależne składniki wymagało przyjęcia dwóch warunków plastyczności oraz dwóch praw plastycznego płynięcia. Dylatację materiału opisuje nieliniowy warunek plastyczności Ladego, a nieodwracalne zagęszczenie warunek utworzony z pierwszego i drugiego niezmiennika tensora naprężenia. Model zawiera w sumie 14 parametrów.

Parametry obu modeli wyznaczone były w testach jednoosiowego i wszechstronnego ściskania próbek materiału w aparacie trójosiowego ściskania. Rysunek 2 przedstawia przykłady aproksymacji eksperymentalnych zależności naprężenie-odkształcenie podczas testów monotonicznego obciążania próbek ziarna pszenicy modelami Ghaboussi i Momena oraz Ladego. Model Ladego dokładniej aproksymuje przebieg zależności naprężenie-odkształcenie podczas



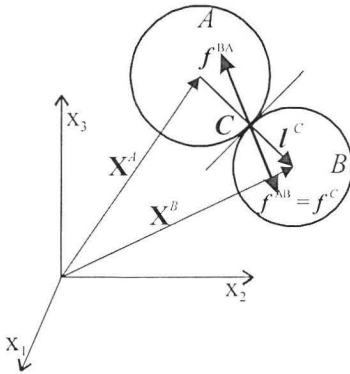
Rys. 2. Porównanie teoretycznych i eksperymentalnych przebiegów zależności naprężenie-odkształcenie podczas testów trójosiowego ściskania próbek ziarna pszenicy [23]

Fig. 2. Comparisons of calculated and measured stress-strain relations in triaxial compression tests of wheat grain samples [23]

monotonicznego obciążania, natomiast ustępuje modelowi Ghaboussi i Momena w przypadku opisu zachowania się materiałów z histerezą w warunkach cyklicznych obciążeń. Jednak prostota i spójność matematyczna czynią go bardzo wygodnym narzędziem modelowania materiałów sypkich.

MODELE MIKROSTRUKTURALNE

Podejście mikrostrukturalne podejmuje próby wyprowadzenia ogólnych praw rządzących zachowaniem się materiału sypkiego na podstawie oddziaływań zachodzących pomiędzy poszczególnymi granulami. Modele mikrostrukturalne umożliwiają wyznaczenie zmiennych makroskopowych (naprężeń i odkształceń) na podstawie analizy zmiennych mikroskopowych (odkształceń i przemieszczeń poszczególnych ziaren ośrodka oraz rozkładu sił w punktach kontaktu ziaren). Zakłada się przy tym, że makroskopowa skala długości (złożenie materiału sypkiego) jest kilka rzędów wielkości większa od mikroskopowej skali długości (pojedyncza granula).



Rys. 3. Wektor siły oraz normalna w punkcie kontaktu ziaren ośrodka

Fig. 3. Force and normal direction at contact point of grains

Związek pomiędzy makroskopowym naprężeniem a rozkładem zmiennych mikroskopowych (rys. 3): sił f^c w punktach styku ziaren oraz wektorów normalnych w punktach styku ziaren I^c uzyskuje się poprzez uśrednienie iloczynów zewnętrznych wektorów f^c i I^c po wszystkich punktach kontaktu w rozważanej objętości V ośrodka [3]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{C \in V} f_i^c I_j^c \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (12)$$

Tensor $\bar{\sigma}_{ij}$, uśredniony dla bardzo dużej liczby cząstek, odpowiada tensorowi naprężenia w sensie mechaniki ośrodków ciągłych. Jego wyznaczenie wymaga jednak znajomości wektorów siły i kierunków normalnych wszystkich cząstek.

Jeśli znany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennych mikroskopowych średni tensor naprężenia wyznaczyć można z wyrażenia całkowego [2]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = N \int_0^{2\pi} P(\theta) \bar{f}_i(\theta) l_j d\theta, \quad (13)$$

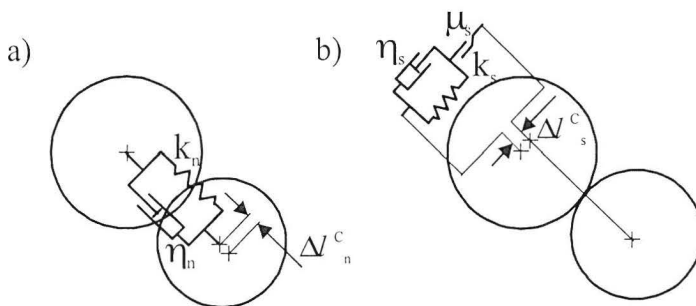
gdzie: $\bar{f}_i(\theta)$ – składowa i -ta średniej siły w punktach kontaktu zorientowanych pod kątem θ ,

N – liczba kontaktów przypadająca na jednostkę pola powierzchni,

$P(\theta)$ – rozkład prawdopodobieństwa.

Metoda elementów dyskretnych

W ramach podejścia mikrostrukturalnego Cundall i Strack [4] zaproponowali szeroko dziś rozpowszechnioną metodę elementów dyskretnych DEM (Distinct Element Method). Polega ona na uproszczonym rozwiązaniu równania ruchu każdej po kolei granuli ośrodka. Ruch materiału traktowany jest jako przemieszczanie się przez ośrodek zaburzenia zapoczątkowanego w warunkach brzegowych. Procedura obliczeniowa oparta jest na założeniu, że podczas bardzo krótkiego elementarnego kroku czasowego Δt przyspieszenie i prędkość są stałe, a zakłócenie ruchu jednej granuli nie przemieszcza się dalej niż do najbliższych sąsiadów. Na ogół przyjmuje się, że w kierunku normalnym do powierzchni styku zachodzi lepko-sprężyste oddziaływanie między ziarnami ośrodka, a w kierunku stycznym lepko-sprężysto-plastyczne (rys. 4). Równanie ruchu cząstki uwzględnia siłę grawitacji, oddziaływanie z sąsiadami oraz siły wynikające z przyjętych warunków brzegowych.



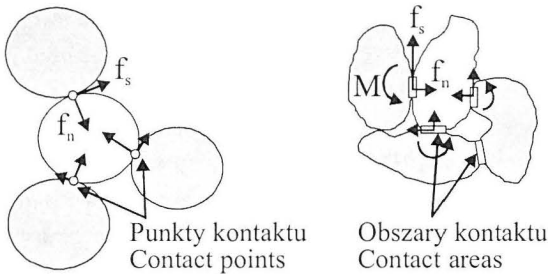
Rys. 4. Oddziaływanie pomiędzy dwoma ziarnami: a) lepko-sprężyste w kierunku normalnym, b) lepko-sprężysto-cierne w kierunku stycznym

Fig. 4. Contact interaction between two grains: a) visco-elastic in the normal direction, b) visco-elastic with a sliding friction in the tangential direction

Sakaguchi i Favier [20] wykazali na podstawie symulacji metodą DEM procesu ścinania materiału sypkiego (np. ziarna zbóż) w aparacie bezpośredniego ścinania, że metoda ta jest wygodnym narzędziem poszukiwania powiązań pomiędzy oddziaływaniami w skali mikro i makro. Autorzy stwierdzili wyraźną korelację pomiędzy sumą sił w punktach kontaktu ziaren zgromadzonych w jednej z połówek aparatu ścinania a siłą normalną wywieraną przez ziarna na ścianę, interpretowaną jako siła tarcia wewnętrznego materiału sypkiego w procesie bezpośredniego ścinania.

Zmodyfikowana metoda elementów dyskretnych MDEM

Kolejny istotny krok w rozwoju modeli mikrostrukturalnych należy do Iwashity i Ody [9]. Polega on na zastąpieniu punktów styku ziaren obszarami styku. W obszarze styku działają naprężenia, a nie jak dotychczas punktowo przyłożone siły: normalna – f_n i styczna – f_s (rys. 5). Oprócz naprężenia istotny jest również moment naprężeniowy M . Zastąpienie punktów kontaktu obszarami kontaktu umożliwia uwzględnienie w sposób poprawny oporów ruchu obrotowego.



Rys. 5. Punkty kontaktu (DEM) i obszary kontaktu (MDEM) [9]

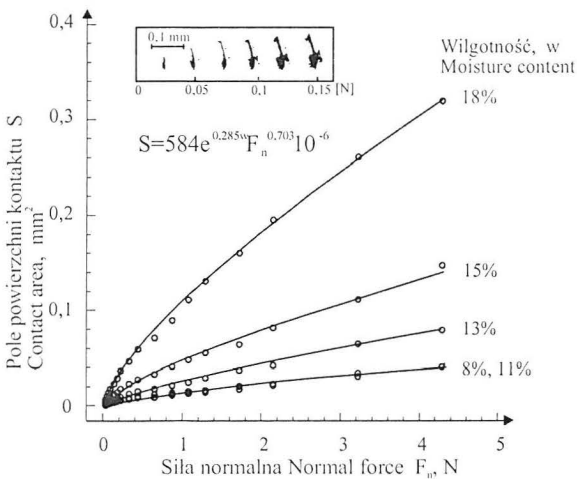
Fig. 5. Contact points (DEM) and contact surfaces (MDEM) [9]

Zaproponowana przez Iwashitę i Odę modyfikacja metody DEM stworzyła nowe możliwości interpretacyjne. Na bazie przeprowadzonych symulacji komputerowych autorzy zaproponowali interpretację fizyczną procesu prowadzącego do wyczerpania wytrzymałości na ścinanie materiału sypkiego. W miarę wzrostu deformacji postaciowej wcześniej wytworzone kontakty ziaren zanikają, a w ich miejsce powstają nowe. Skutkiem tego oś łańcucha kontaktów podąża za kierunkiem większego naprężenia głównego. Struktura taka staje się stopniowo coraz mniej stabilna, gdyż zaczyna w niej brakować punktów podparcia wzdłuż kierunku mniejszego naprężenia głównego. Struktura materiału ulega stopniowej rekonstrukcji na skutek wybożenia wytworzonych długich kolumn przenoszenia obciążenia. Ograniczenia dopuszczalnych wybożeń łańcuchów prowadzą do

lokalizacji tego procesu. Na skutek wyboczenia kolumn przenoszenia sił odległości pomiędzy kolumnami powiększają się prowadząc do nagłego wzrostu porowatości, któremu towarzyszy wyczerpanie wytrzymałości materiału. Wyboczenia kolumn powodują duże obroty ziaren ośrodka zlokalizowane w wąskim obszarze warstwy ścinania oddzielającej przemieszczające się względem siebie praktycznie sztywne bloki materiału.

Badania materiałów sypkich pochodzenia biologicznego

Przedstawiony wyżej etap rozwoju modeli mikrostrukturalnych wydaje się być szczególnie atrakcyjny do opisu oddziaływań zachodzących w materiałach pochodzenia biologicznego. Materiały te charakteryzują się, w przeciwieństwie do materiałów pochodzenia mineralnego, dużą odkształcalnością ziaren, zależną silnie od wilgotności. Woda wnikać do wnętrza ziaren wywołuje zarówno ilościową jak i jakościową zmianę właściwości fizycznych. Badania doświadczalne wskazują, że pole powierzchni elementarnego styku ziarna pszenicy z płaską powierzchnią wzrasta wolniej niż liniowo ze wzrostem obciążenia oraz wykładniczo ze wzrostem wilgotności (rys. 6) [8]. Wyznaczona eksperymentalnie wartość wykładnika równa 0,703 koresponduje dobrze z wartością teoretyczną równą 0,67, wynikającą ze wzoru Hertza, opisującego oddziaływanie pomiędzy sprężystymi kulami. Oznacza to, że w szerokim zakresie wilgotności ziarna (8-18%) można stosować wzór Hertza do opisu zależności siła-przemieszczenie w obszarze kontaktu ziaren. Wraz ze zmianą wilgotności zmieniać się będą jedynie parametry lepko-sprężysto-plastycznego kontaktu (rys. 4).



Rys. 6. Pole powierzchni kontaktu ziarna pszenicy z płaską powierzchnią w funkcji wilgotności i siły normalnej [8]

Fig. 6. Surface area of a single contact of wheat grain with flat surface as a function of the moisture content and the normal force [8]

Badania doświadczalne procesu formowania się warstwy ścinania w materiale sypkim potwierdziły, że niezależnie od wielkości ziaren ośrodka grubość warstwy ścinania jest stałą wielokrotnością wymiaru ziarna [7]. Stwierdzono, że podczas testów trójosiowego ściskania próbek nasion rzepaku, gorczycy białej, grochu oraz ziarna pszenicy grubość warstwy ścinania wynosi 12-16 średnich wymiarów ziarna ośrodka (tab. 1).

Wyznaczona przez Bardeta i Proubeta [1] metodą elementów dyskretnych grubość warstwy ścinania dla płaskiego stanu odkształcenia wynosi 7-8 wymiarów ziaren ośrodka. Porównanie wyników badań różnych autorów wskazuje, że niezależnie od rodzaju materiału (wyidealizowany układ sztywnych ciał, piasek, odkształcalne nasiona) proces lokalizacji deformacji postaciowej przebiega podobnie, zarówno w płaskim jak i przestrzennym stanie odkształcenia [7,17,19]. Oba podejścia: mikro- i makroskopowe w identyczny sposób modelują jego przebieg [1,9,16]. Niewielka rozbieżność między teoretycznym i doświadczalnym oszacowaniem grubości warstwy wskazuje na potrzebę dalszego doskonalenia metod badawczych.

Tabela 1. Parametry warstwy ścinania oraz materiału sypkiego [7]

Table 1. Parameters of the shear band and the material [7]

Material Material	Kąt tarcia wewnętrznego Angle of internal friction (deg)	Średni wymiar ziarna ośrodka* Mean grain diameter* (mm)	Odkształcenie Strain ϵ_1 (-)	Grubość warstwy ścianania/średni wymiar ziarna ośrodka Shear band thickness/mean grain diameter (-)
Rzepak Rape seeds	24,3 ± 0,7	2,0 ± 0,02	0,08	12
Gorczyca biała Mustard seeds	26,0 ± 0,7	2,5 ± 0,02	0,10	12-16
Pszenica Wheat	24,6 ± 0,8	4,0 ± 0,03	0,17	16
Groch Pea seeds	28,8 ± 0,5	6,1 ± 0,06	0,25	12

*Średnia geometryczna trzech wymiarów Geometrical mean of three dimensions.

DYSKUSJA

Rozwój metod komputerowego modelowania pozwala wykonywać symulacje złożonych procesów zachodzących w materiałach sypkich. Modele makroskopowe, choć z natury swojej mają ograniczony zakres możliwości opisu zjawisk na poziomie

oddziaływań między ziarnami, dostarczają wygodnego narzędzia numerycznego rozwiązywania zagadnień, w których materiał sypki, ze względu na udział olbrzymiej liczby granul, można potraktować jako ośrodek ciągły. Poszerzenia zakresu badań dostarczają modele materiału mikropolarnego. Model mikropolarnego materiału hypoplastycznego zastosowany przez Tejchmana [21] do symulacji metodą elementów skończonych procesu napełniania silosu materiałem sypkim pozwolił uzyskać wysoką zgodność z wynikami eksperymentalnymi. Uwzględnienie obrotów ziaren w modelu Cosseratów umożliwia dokładny opis oddziaływania pomiędzy ścianą i materiałem sypkim. Efekt związany z obrotami ziaren jest istotny tylko w obszarze przyściennej warstwy ścinania [21].

Symulacje wykonywane metodą elementów dyskretnych dostarczają wygodnego narzędzia identyfikacji podstawowych mechanizmów decydujących o zachowaniu się materiału sypkiego. Przykładem może być opis mechanizmu prowadzącego do wyczerpania wytrzymałości i lokalizacji deformacji postaciowej w warstwie ścinania. Coraz pełniejsza analiza oddziaływań między ziarnami ośrodka umożliwia pogłębioną interpretację takich makroskopowych pojęć, jak: kąt tarcia wewnętrznego czy kohezja. To z kolei ułatwia doskonalenie modeli makroskopowych. Porównania opisów tworzonych na bazie modeli mikro- i makroskopowych wskazują na jakościową zgodność obu podejść. W przypadku modeli mikro- poważną barierą obliczeniową stanowi liczba cząstek [13]. Pośrednim rozwiązaniem są modele hybrydowe – połączenie opisu w kategoriach makro- i mikroskopowych. Lu i in. [11] stosując tę metodę do opisu wypływu materiału sypkiego ze zbiornika uzyskali bardzo dobrą zgodność wyników. W obszarach zbiornika, w których materiał podlega niewielkiej deformacji postaciowej autorzy zastosowali metodę elementów skończonych, natomiast w obszarach największej deformacji opis metodą elementów dyskretnych.

Rozwijane modele konstytutywne wymagają szczegółowej weryfikacji eksperymentalnej obejmującej m.in. określenie zakresu ich stosowalności. Do realizacji praktycznych zastosowań niezbędne są dokładne wartości parametrów materiałowych. W miarę rozwoju modeli przybywa elementów weryfikacji, np. rozkład obrotów w przypadku ośrodka mikropolarnego. Modele mikromechaniczne wymagają wartości liczbowych takich parametrów pojedynczego kontaktu granul, jak: moduł sprężystości, mikrotwardość, sztywność, wytrzymałość na ścinanie. Wyznaczenie tych parametrów może być wystarczająco obszernym zagadnieniem, biorąc pod uwagę choćby wpływ wilgotności w przypadku materiałów pochodzenia biologicznego.

WNIOSKI

1. Wszystkie wymienione w tej pracy modele konstytutywne materiałów sypkich mają swoje zalety i wady. Podział na modele mikro- i makroskopowe wskazuje na dwie podstawowe skale wielkości, w zakresie których rozpatrywane są oddziaływania leżące u podstaw formułowanych modeli. Obie kategorie modeli uzupełniają się obszarami praktycznych zastosowań powiększając tym samym istotnie grupę opisywanych procesów.

2. Praktyczne zastosowania modeli do opisu zjawisk zachodzących w materiałach sypkich pochodzenia biologicznego wymagają rozszerzenia zakresu eksperymentalnej weryfikacji o elementy charakterystyczne dla tej grupy materiałów, a zwłaszcza zwrócenia szczególnej uwagi na dużą odkształcalność ziaren ośrodka zależną od wilgotności.

PIŚMIENNICTWO

1. **Bardet J.P., Proubet J.:** Shear-band analysis in idealized granular material. *J. of Engng Mechanics*, 118(2), 397-415, 1992.
2. **Bathurst R.J., Rothenberg L.:** Micromechanical aspects of isotropic granular assemblies with linear contact interactions. *Journal of Applied Mechanics*, 55(1), 17-23, 1988.
3. **Chang C.S., C.L. Liao C.L.:** Constitutive relation for a particulate medium with the effect of particle rotation. *Int. J. Solids Structure*, 26(4), 437-453, 1990.
4. **Cundall P.A., Strack O.D.L.:** Discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1), 47- 65, 1979.
5. **Drucker D.C., Prager W.:** Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2), 157-165, 1952.
6. **Gudehus G.:** A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soil and Foundations*, 36(1), 1-12, 1996.
7. **Horabik J., Łukaszuk J.:** Analiza doświadczalna powstawania warstwy ścinania w złożu nasion. *Inżynieria Rolnicza*, 2, 85-91, 2001.
8. **Horabik J., Molenda M.:** True contact area between wheat grain and a flat surface. *Zesz. Probl. Post. Nauk Roln.*, z. 378, 63-68, 1989.
9. **Iwashita K., Oda M.:** Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology*, 109, 192-205, 2000.
10. **Jaeger H.M., Nagel S.R., Behringer R.P.:** Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68(4), 1259-1273, 1996.
11. **Lu Z., Negi S.C., Jofriet J.C.:** A numerical model for flow of granular materials in silos. Part1: Model development. Part 2: Model validation. Part 3. Parametric study. *J. of Agric. Engineering Res.*, 6(3), 223-246, 1997.
12. **Lade P.V., Nelson B.R. Marvin Ito Y.:** Nonassociated flow and stability of granular materials. *J. Engng. Mech.*, 113(9), 1302-1318, 1987.
13. **Masson S., Martinez J.:** Multiscale simulations of the mechanical behaviour of ensiled granular material. *Mech. Cohes.-Frict. Mater.*, 5, 425-442, 2000.

14. **Mróz Z., Drescher A., Hueckel T.:** Doskonalenie metod badania parametrów płynicia materiałów ziarnistych. Prace IPPT, 54, 1973.
15. **Mühlhaus H.B.:** Stress and couple stress in a layered half plane with surface loading. Int. Jour. for Numer. and Analyt. Met. in Geotech., 13, 545-563, 1989.
16. **Mühlhaus H.B., Vardoulakis I.:** The thickness of shear bands in granular materials. Géotechnique, 37(3), 271-283, 1987.
17. **Nedderman R.M., Laohakul C.:** The thickness of the shear zone of flowing granular materials. Powder Technology, 25, 91-100, 1980.
18. **Nowacki W.:** Teoria sprężystości. PWN Warszawa 1970.
19. **Roscoe K.H.:** The influence of strains in soil mechanics. 10th Rankine Lecture. Géotechnique, 20(2), 127-170, 1970.
20. **Sakaguchi E., Favier J.F.:** Analysis of the shear behaviour of a grain assembly using DEM simulation. International Agrophysics, 14, 241-248, 2000.
21. **Tejchman J.:** Numerical simulation of filling in silos with a polar hypoplastic constitutive model. Powder technology, 96, 227-239, 1998.
22. **Tripodi M.A., Puri V.M., Manbeck H.B., Messing G.L.:** Constitutive models for cohesive particulate materials. J. Agric. Engng Res., 53, 1-21, 1992.
23. **Zhang Q., Puri V.M., Manbeck H.B., Wang M.C.:** Elastoplastic constitutive parameters of en masse wheat for a cyclic load model. Trans. of the ASAE, 31(3), 910-916, 1988.

MACRO- I MICROSCOPIC MODELS OF GRANULAR MATERIALS

Józef Horabik, Marek Molenda

Institute of Agrophysics, Polish Academy of Sciences, ul. Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27
e-mail: jhorabik@demeter.ipan.lublin.pl

Abstract. The objective of the paper was to review constitutive models of granular solids formulated in macro- and microscopic scales. The most frequently used yield conditions and yield rules involving interactions in makro- and micro scales were considered. Examples of practical applications for use as a constitutive model of granular solids of biological origin were shown. The necessity of increasing the scope of an experimental verification with focusing attention on large deformation of grains was indicated.

Key words: granular solids, constitutive models