

WYZNACZANIE ILORAZU NAPORU W ROŚLINNYCH MATERIAŁACH SYPKICH. CZ. I. ROZWAŻANIA TEORETYCZNE¹

J. Horabik, R. Rusinek

Instytut Agrofizyki PAN, ul. Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27

e-mail: jhorabik@demeter.ipan.lublin.pl

Streszczenie: W pracy rozważano możliwości interpretacyjne analitycznej metody wyznaczania ilorazu w materiałach sypkich opartej na założeniu, że materiał zachowuje się jak ciało plastyczne. Analizowano uplastycznienie materiału w różnych obszarach warstwy ośrodka: w osi zbiornika, przy ścianie oraz w osi i przy ścianie w czynnym (magazynowanie) i biernym (opróżnianie) stanie naprężenia. Rozpatrzono wpływ kąta tarcia wewnętrznego i kąta tarcia materiału o ścianę zbiornika na iloraz naporu oraz porównano uzyskane zależności z zaleceniami norm budowlanych. Stwierdzono, że wartości ilorazu naporu rekomendowane przez normy pokrywają się z wyznaczonymi na drodze rozważań teoretycznych w przypadku uplastycznienia przy ścianie w czynnym stanie naprężenia, gdy kąt tarcia zewnętrzny jest zbliżony do kąta tarcia wewnętrznego.

Słowa kluczowe: iloraz naporu, kąt tarcia, materiał sypki, silos

WSTĘP

Materiały sypkie magazynowane w zbiornikach wywierają napór w kierunku poziomym i pionowym na ścianę i dno wywołany ciężarem ośrodka oraz działaniem sił zewnętrznych. Zbiorniki muszą spełniać założenia wytrzymałościowe i funkcjonalne oraz uwzględniać stan naprężenia w złożu materiału. Dokładna znajomość naporu wywieranego na konstrukcję zbiornika jest nieodzowna do efektywnego projektowania operacji technologicznych, którym poddawany jest

¹ Pracę wykonano w ramach projektu badawczego 5 P06F 021 17 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 1999-2002.

materiał sypki. Iloraz naporu, czyli stosunek naporu poziomego do pionowego - k , jest jednym z trzech podstawowych parametrów materiałów sypkich stosowanych w uproszczonej metodzie obliczania rozkładu naporu. Dwa pozostałe parametry to współczynnik tarcia materiału sypkiego o ścianę zbiornika oraz ciężar objętościowy.

Współczynnik tarcia zewnętrznego jest parametrem zależnym głównie od szorstkości powierzchni i właściwości materiału sypkiego:

$$\mu = \frac{T}{N} \quad (1)$$

gdzie:

N – siła normalna,

T – siła styczna powodująca poślizg.

Tarcie materiału sypkiego o ścianę zbiornika powoduje odchylenie wektora naprężenia o kąt φ_w , nazywany kątem tarcia zewnętrznego. Gdy tarcie jest w pełni zmobilizowane, czyli gdy wektor naprężenia jest maksymalnie odchyłony od kierunku normalnego jak w przypadku tarcia kinetycznego, iloraz naporu stycznego do normalnego jest równy współczynnikowi tarcia μ . W przeciwnym razie iloraz ten jest mniejszy niż współczynnik tarcia:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_n} < \mu. \quad (2)$$

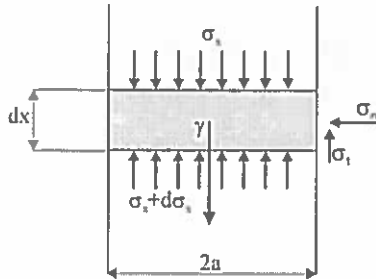
W celu odróżnienia współczynnika tarcia μ , jako parametru materiałowego, od ilorazu naporu stycznego do normalnego w stanie równowagi statycznej Kóta [6] proponuje ten ostatni nazwać „wirtualnym współczynnikiem tarcia”.

Ciężar objętościowy materiału ziarnistego γ jest ściśle powiązany z gęstością upakowania czyli koncentracją ziaren. Gęstość zależy od sposobu napełniania zbiornika oraz właściwości ziarna.

IŁORAZ NAPORU W UJĘCIU JANSSENA

Iloraz naporu jako parametr materiału sypkiego został po raz pierwszy zastosowany do obliczenia rozkładu naporu w silosie przez Janssena [4] ponad sto lat temu. Metoda Janssena jest nadal metodą najczęściej rekomendowana przez normy budowlane [8]. Punktem wyjścia jest przyjęcie takiego kształtu elementarnego obszaru materiału, dla którego można określić średni stan naprężenia.

Najprostszym i najpopularniejszym podejściem jest przyjęcie wycinka materiału o skończonym wymiarze poprzecznym i wysokości dx (Rys. 1).



Rys. 1. Naprężenia działające na cylindryczną warstwę materiału sypkiego.

Fig. 1. Stresses acting on a cylindrical slice of granular material.

Równanie równowagi sił działających w kierunku pionowym na elementarną warstwę w kształcie walca o wysokości dx :

$$\sigma_x A - (\sigma_x + d\sigma_x) A + A \gamma dx - \sigma_t U dx = 0 \tag{3}$$

można zapisać jako różniczkowe równanie równowagi uśrednionych naprężeń:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\sigma_t}{a} - \gamma = 0 \tag{4}$$

gdzie:

- $A = \pi a^2$ - pole powierzchni walcowego wycinka,
- $U = 2\pi a$ - obwód wycinka,
- σ_n - naprężenie poziome,
- σ_t - naprężenie styczne,
- σ_x - średnie naprężenie pionowe.

Oznacza to, że naprężenie σ_x jest uśrednione po powierzchni przekroju poprzecznego warstwy zaś naprężenie styczne σ_t po obwodzie warstwy [1]. Równanie (4) zawiera dwie niewiadome σ_x i σ_t . Do jego rozwiązania konieczne jest przyjęcie pewnych związków pomiędzy σ_t i σ_x lub σ_x i σ_n . Janssen [4] założył stały stosunek naprężeń σ_n i σ_x oraz σ_t i σ_n na całej wysokości zbiornika a ponadto stałą wartość ciężaru objętościowego γ :

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_x} = k = const. \quad \text{oraz} \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_n} = \mu. \tag{5}$$

Przy takich założeniach równanie (4) jest liniowym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2k\mu}{a}\sigma_x - \gamma = 0, \quad (6)$$

którego rozwiązaniem w przypadku $\sigma_x(x=0) = \sigma_x^0$ jest funkcja:

$$\sigma_x = \frac{\gamma a}{2k\mu} + \left(\sigma_x^0 - \frac{\gamma a}{2k\mu} \right) e^{\frac{-2k\mu}{a}x}. \quad (7)$$

W przypadku górnej powierzchni swobodnej otrzymujemy powszechnie znane równanie Janssena:

$$\sigma_x = \frac{\gamma a}{2k\mu} \left(1 - e^{\frac{-2k\mu}{a}x} \right). \quad (8)$$

INTERPRETACJA FIZYCZNA ILORAZU NAPORU

Poszukując interpretacji fizycznej ilorazu naporu należy powiązać go z właściwościami mechanicznymi materiału sypkiego oraz ze stanem naprężenia w materiale w poszczególnych fazach operacji technologicznych.

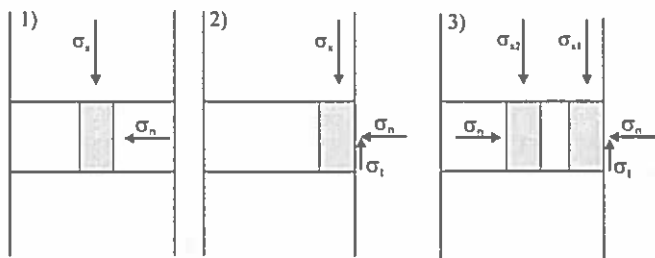
Roślinne materiały sypkie zachowują się na ogół jak materiał sprężysto-plastyczny. Iloraz naporu zależy może zarówno od właściwości sprężystych materiału, jak również od właściwości plastycznych. Oznacza to, że na podstawie rozważań ogólnych wyznaczyć można jedynie graniczne, dopuszczalne w ramach przyjętego modelu materiału, wartości ilorazu naporu.

W przypadku ciała sprężystego poddanego jednoosiowemu odkształceniu, przy pominięciu tarcia o ścianę iloraz naporu można otrzymać z podstawowych zależności teorii sprężystości jako funkcję współczynnika Poissona [5]:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (9)$$

Przyjmując z kolei, że materiał sypki zachowuje się jak ciało plastyczne należy szczegółowo przeanalizować obszary wewnątrz elementarnej warstwy, w których materiał może osiągnąć stan graniczny. Ze względu na podejście uśrednione jedynie w osi zbiornika oraz przy ścianie średnie naprężenia działające na warstwę materiału można powiązać z lokalnymi naprężeniami w materiale [2]. Iloraz naporu przyjmuje różne wartości zależnie od tego, w którym z wymienionych obszarów stan naprężeń spełnia warunek plastyczności (Rys.2).

Iloraz naporu przyjmuje różne wartości w czynnym i biernym stanie naprężenia. Stan czynny powszechnie odnoszony jest do fazy napelniania oraz magazynowania, kiedy naprężenie w materiale powodowane jest ciężarem własnym materiału zalegającego i utratą energii kinetycznej spadających ziaren. Dominują wtedy naprężenia pionowe. Magazynowanie należy także zaliczyć do tej fazy, ponieważ można ją traktować jako napelnianie przy ustalonej wysokości materiału. W dalszej fazie magazynowania materiał może ulec odkształceniu plastycznemu na skutek ściskania, w przypadku nieodkształcalnych ścian można traktować to jako ściskanie jednoosiowe. Stan bierny odpowiada opróżnieniu zbiornika. Zmienia się wtedy konfiguracja naprężeń. W strefie wypływu dominują naprężenia poziome.



Rys. 2. Uplastycznienie materiału: (1) w osi, (2) przy ścianie, (3) w osi i przy ścianie.

Fig. 2. Yielding of material: (1) at the centre, (2) at the wall, (3) at the centre and at the wall.

1. Uplastycznienie w osi zbiornika

Ze względu na symetrię rozważanej warstwy materiału w osi zbiornika naprężenia poziome i pionowe są zarazem naprężeniami głównymi. Odpowiednio dla stanu czynnego naprężenie pionowe jest większe od poziomego, a dla biernego odwrotnie. Z zależności trygonometrycznych wynikających z diagramu Mohra otrzymujemy wyrażenie na stałą k :

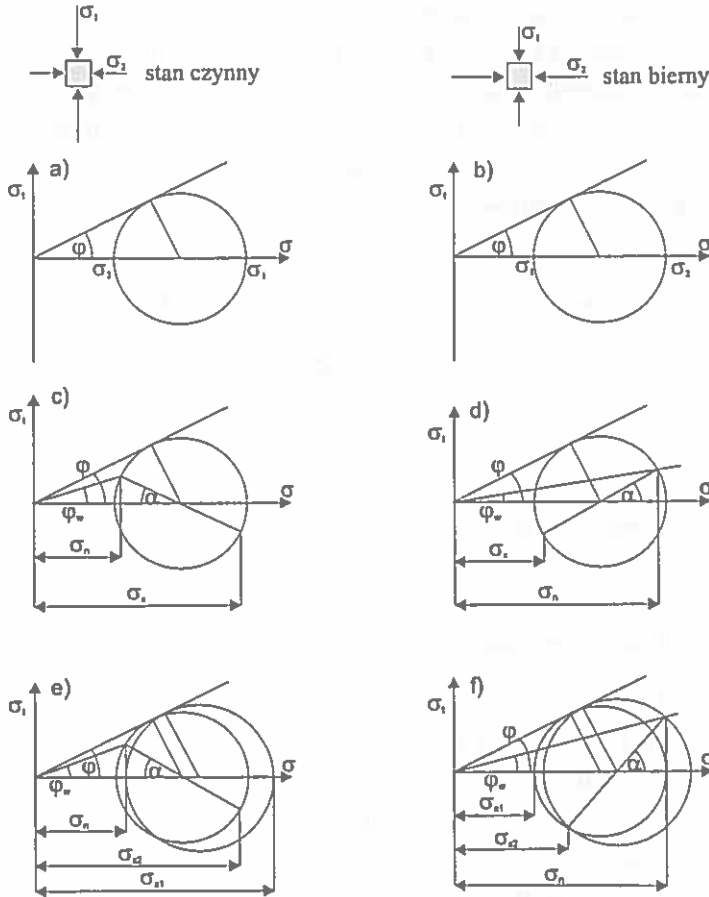
- dla stanu czynnego (Rys.3a)

$$k = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad (10)$$

- dla stanu biernego (Rys.3b)

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (11)$$

Założenie stałości naprężeń poziomych i pionowych wzdłuż rozpatrywanej warstwy prowadzi do wykroczenia naprężeń przy ścianie poza warunek plastyczności. Nasuwa to wątpliwość, czy poprawne jest założenie o stałości naprężenia pionowego i poziomego wzdłuż warstwy.



Rys. 3. Czynny i bierny stan naprężenia w materiale: (a), (b) uplastycznienie w osi; (c), (d) uplastycznienie przy ścianie; (e), (f) uplastycznienie w osi i przy ścianie [2].

Fig. 3. Mohr's circles for active and passive stress state: (a), (b) yielding at the centre; (c), (d) yielding at the wall; (e), (f) yielding at the centre and at the wall [2].

2. Upłastycznienie przy ścianie zbiornika

Dla przypadku upłastycznienia przy ścianie koło Mohra reprezentujące stan naprężenia w tym obszarze warstwy jest styczne do prostej reprezentującej warunek plastyczności. Z zależności trygonometrycznych pomiędzy składowymi naprężeniami dla upłastycznienia przy ścianie otrzymujemy stałą k jako funkcję kąta tarcia wewnętrznego φ oraz kąta tarcia materiału o ścianę φ_w [7]:

- dla stanu czynnego (Rys.3c)

$$k = \frac{1 - \sin \varphi \cos \alpha}{1 + \sin \varphi \cos \alpha}, \quad (12)$$

- dla stanu biernego (Rys.3d)

$$k = \frac{1 + \sin \varphi \cos \alpha}{1 - \sin \varphi \cos \alpha}, \quad (13)$$

gdzie:

- dla stanu czynnego

$$\alpha = \arcsin \frac{\sin \varphi_w}{\sin \varphi} - \varphi_w, \quad (14)$$

- dla stanu biernego

$$\alpha = \arcsin \frac{\sin \varphi_w}{\sin \varphi} + \varphi_w. \quad (15)$$

3. Upłastycznienie w osi i przy ścianie zbiornika

Dla przypadku upłastycznienia przy ścianie i w środku złoza koła Mohra reprezentujące stan naprężenia w tych obszarach muszą być styczne do linii wyznaczającej warunek plastyczności. Z założenia stałości naprężenia poziomego oraz jednoczesnego upłastycznienia przy ścianie i w osi zbiornika wynika, że w tym przypadku naprężenie w kierunku pionowym nie może być stałe wzdłuż warstwy. Zatem wyliczając stałą k należy uwzględnić różne wartości naprężenia pionowego przy ścianie i w środku. Stosując uproszczenie polegające na uśrednieniu tych wartości [2]:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{x1} + \sigma_{x2}}{2} \quad (16)$$

otrzymujemy następujące wyrażenia określające iloraz naporu:

- dla stanu czynnego (Rys.3e)

$$k = \frac{2(1 - \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi) + (1 - \sin \varphi) \left(1 + \frac{2 \sin \varphi \cos \alpha}{1 - \sin \varphi \cos \alpha} \right)}, \quad (17)$$

-dla stanu biernego (Rys.3f)

$$k = \frac{2(1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi) + (1 + \sin \varphi) \left(1 - \frac{2 \sin \varphi \cos \alpha}{1 + \sin \varphi \cos \alpha} \right)}. \quad (18)$$

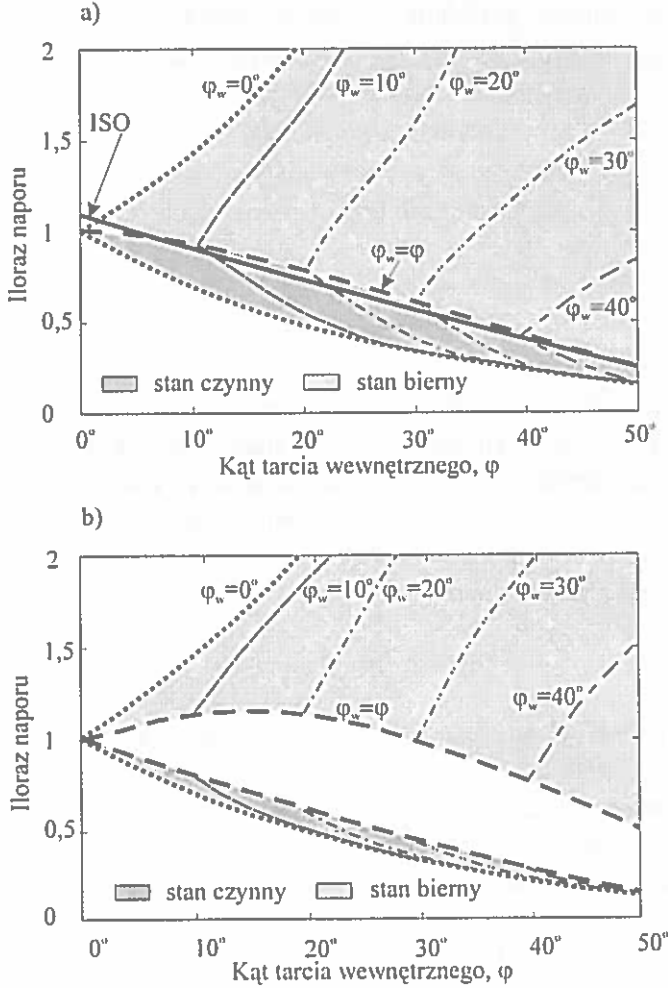
Wartości ilorazu naporu k wyliczone w oparciu o zależności (10-13), (17) i (18) dla powszechnie spotykanych zakresów wartości kąta tarcia wewnętrznego φ oraz kąta tarcia o ścianę φ_w przedstawiono na rysunkach 4a i 4b. Dla wszystkich trzech rozważanych przypadków iloraz naporu w biernym stanie naprężenia jest większy niż w stanie czynnym. Linia gęsto przerywana przedstawiająca na tych rysunkach iloraz naporu dla przypadku uplastycznienia w osi zbiornika stanowi w przypadku czynnego stanu naprężenia dolne ograniczenie wartości ilorazu naporu dopuszczalnych w ramach przyjętych założeń, a w przypadku biernego stanu naprężenia górne ograniczenie. Oznacza to, że przypadek uplastycznienia przy ścianie (również w osi zbiornika i przy ścianie) dla wartości kąta tarcia o ścianę $\varphi_w=0$ sprowadza się do uplastycznienia w całej warstwie, a tym samym staje się równoznaczny z przypadkiem uplastycznienia w osi zbiornika. Dla kąta tarcia wewnętrznego równego zero we wszystkich trzech przypadkach iloraz naporu jest równy jeden, co odpowiada stanowi hydrostatycznemu w cieczy nieściśliwej.

W przypadku uplastycznienia przy ścianie zbiornika znika różnica pomiędzy czynnym i biernym stanem naprężenia jeśli kąt tarcia o ścianę jest równy kątowi tarcia wewnętrznego $\varphi_w=\varphi$ (linia przerywana na rys. 4a). W tym przypadku wzory (10) i (11) określające odpowiednio czynny i bierny przypadek redukują się do jednego wzoru:

$$k = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}. \quad (19)$$

W przypadku uplastycznienia w osi zbiornika i przy ścianie zakres dopuszczalnych wartości ilorazu naporu (Rys.4b) ulega istotnemu zawężeniu w porównaniu do przypadku uplastycznienia przy ścianie (Rys.4a), zaś obszar wspólnych wartości ilorazu naporu dla czynnego i biernego stanu naprężenia redukuje się do punktu: $k=1$ dla $\varphi=\varphi_w=0$.

Przedstawione zależności analityczne określające iloraz naporu odnoszą się do zbiornika o ścianach pionowych. W przypadku o ścianach pochyłych iloraz naporu zależy również od kąta pochylenia ściany [2].



Rys. 4. Iloraz naporu w funkcji kąta tarcia wewnętrznego i tarcia o ścianę: (a) uplastycznienie przy ścianie zbiornika; — iloraz naporu wg norm [3], (b) uplastycznienie w osi i przy ścianie.

Fig. 4. Pressure ratio as the function of the angle of internal friction and the angle of wall friction: (a) yielding at the wall; — pressure ratio according to the design standards [3], (b) yielding at the centre and at the wall.

DYSKUSJA

Omówione przykłady wyznaczania ilorazu naporu w oparciu o przyjęte założenie uplastycznienia materiału w poszczególnych obszarach warstwy materiału sypkiego ilustrują zakresy dopuszczalnych wartości ilorazu. W większości praktycznych przypadków iloraz naporu zawiera się w znacznie węższym przedziale wartości. Normy budowlane wychodząc naprzeciw zapotrzebowaniu praktyki na wartości ilorazu naporu reprezentatywne dla typowych zagadnień inżynierskich zalecają wyliczanie ilorazu naporu z uproszczonej zależności empirycznej [3]:

$$k=1,1(1-\sin\varphi). \quad (20)$$

Rysunek 4a przedstawia porównanie zalecanej zależności empirycznej z wynikami rozważań teoretycznych. Dla zakresu wartości kąta tarcia wewnętrznego występującego powszechnie w praktyce zalecane przez normy ilorazu naporu znajdują się w górnej części obszaru odpowiadającego przypadkowi uplastycznienia przy ścianie w czynnym stanie naprężenia dla kąta tarcia o ścianę zbliżonego do kąta tarcia wewnętrznego.

PIŚMIENNICTWO

1. Cowin S.C.: The theory of static loads in bins. *Journal of Applied Mechanics*, 44(3), 409-412, 1977.
2. Drescher A.: *Metody obliczeń parć i przepływu materiałów ziarnistych w zbiornikach*. PWN, Warszawa-Poznań, 1983.
3. ISO 11697: Bases for design of structures – Loads due to bulk materials. 1995 (E).
4. Janssen H.A.: *Versuche über Getreidedruck in Silozellen*. Verein Deutscher Ingenieure, Zetschrift (Düsseldorf), 39, 1045-1049, 1895.
5. Kezdi A.: *Handbook of soil mechanics*. Akademia Kiado. Budapest 1974.
6. Kóta B.: Operational tests of discharge tubes with models. *Powder Handling and Processing*, 8(1), 25-30, 1996.
7. Moysey E.B.: Active and passive pressures in deep grain bin. *Transactions of the ASAE*, 77, 1409-1413, 1979.
8. Wilms H.: Criteria for evaluation of silo design codes. *Bulk Solids Handling*, 11 (1), 55-61, 1991.

DETERMINATION OF PRESSURE RATIO IN PLANT GRANULAR SOLIDS. PART I. THEORETICAL CONSIDERATIONS

J. Horabik, R. Rusinek

Institute of Agrophysics, Polish Academy of Sciences, Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27
e-mail: jhorabik@demeter.ipan.lublin.pl

Summary: Interpretational possibilities of the analytical method of determination of the pressure ratio based on the theory of plasticity were considered. Yielding at different regions of the layer of granular material was considered: at the centre, at the bin wall, and at the centre and at the bin wall in the active (storage) and the passive (discharge) stress case. The influence of the angle of internal friction and the angle of the wall friction on the pressure ratio was analysed. Obtained relationships were compared with recommendations of the design standards. Values of the pressure ratio recommended by the design standards are similar to that obtained from theory for the case of yielding at the bin wall in the active stress state for the values of the angle of wall friction slightly smaller than the angle of internal friction.

Keywords: pressure ratio, angle of friction, granular solids, silo.