

METODA WYZNACZANIA CIĄGŁEGO SPEKTRUM RELAKSACJI LEPKOSPŘŻYSTYCH MATERIAŁÓW ROŚLINNYCH*

Anna Stankiewicz, Krzysztof Gołacki

Katedra Podstaw Techniki, Akademia Rolnicza
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: astan@hortus.ar.lublin.pl

Streszczenie. W pracy rozważa się problem wyznaczania ciągłego spektrum relaksacji lepkospřżystych materiałów roślinnych w oparciu o uzyskane eksperymentalnie czasowe przebiegi modułów relaksacji, zgromadzone w standardowym teście relaksacji naprężeń. Zaproponowano metodę identyfikacji bazującą na przybliżeniu spektrum częstotliwości relaksacji skończonym szeregiem wielomianów Laguerra. Dla zapewnienia stabilności algorytmu zastosowano technikę regularyzacji Tichonowa. Obliczenia macierzowe oparto o schemat dekompozycji względem wartości szczególnych. Zaproponowano prostą regułę doboru współczynnika regularyzacji. Przeprowadzono analizę zbieżności algorytmu oraz oszacowano błąd modelu dla dokładnych i zakłóconych pomiarów modułu relaksacji. Rozważania zilustrowano przykładem numerycznym.

Słowa kluczowe: spektrum relaksacji, moduł relaksacji, identyfikacja, regularyzacja Tichonowa, wielomiany Laguerra

WSTĘP

Badania prowadzone w ciągu ostatnich kilkunastu lat wykazały, iż spektrum relaksacji jest dogodnym narzędziem analizy własności liniowych materiałów lepkospřżystych [1,4,8,13,16,19], w szczególności może znaleźć zastosowanie w analizie zjawisk zachodzących w wysoko uwodnionych materiałach roślinnych (warzywa, owoce) poddawanych różnego typu obciążeniom mechanicznym [4,8]. Znając spektrum relaksacji można wyznaczyć inne charakterystyki materiałów lepkospřżystych: moduł ściśliwości objętościowej, moduł odkształcenia postaciowego lub funkcję pełzania. Porównanie rozkładów gęstości czasów lub częstotliwości relaksacji otrzymanych dla materiałów o różnej wilgotności, turgorze lub

* Praca częściowo finansowana w ramach projektu badawczego KBN 5 P06F 0006 19.

dla obciążeń realizowanych w różnych warunkach pozwala na ilościową analizę skutków mechanicznej ingerencji w materiał podczas testu [19].

Spektrum relaksacji nie jest wprost dostępne pomiarowo, musi więc być wyznaczane w oparciu o pomiarowo dostępne charakterystyki materiałów. W literaturze znanych jest wiele metod wyznaczania spektrum relaksacji w oparciu o dane zgromadzone w wyniku testu, w którym materiał poddawany jest odkształceniom oscylacyjnym o małej amplitudzie w dostatecznie dużym zakresie częstotliwości, a więc wykorzystujących charakterystyki częstotliwościowe, np. [1,3,13,16,19], tylko nieliczne metody [4,8,18] bazują na charakterystykach czasowych. W tej pracy prezentujemy metodę wyznaczania spektrum częstotliwości relaksacji w oparciu o przebiegi czasowe modułów relaksacji, uzyskane w standardowym teście relaksacji naprężeń [5].

MATERIAŁ I METODY

Spektrum relaksacji materiałów lepkosprężystych

W zakresie niewielkich deformacji związek między naprężeniem $\sigma(t)$ a pochodną odkształcenia $\dot{\gamma}(t)$ opisuje całkowe równanie konstytutywne oparte o zasadę superpozycji Boltzmanna [2]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\lambda) \dot{\gamma}(\lambda) d\lambda ,$$

gdzie: $G(t)$ jest liniowym modułem relaksacji w pełni scharakteryzowanym dla danego materiału poprzez spektrum czasów relaksacji $H_\tau(\tau)$ [2]

$$G(t) = \int_0^\infty H_\tau(\tau) e^{-t/\tau} d\tau$$

lub równoważnie poprzez spektrum częstotliwości relaksacji $H_\nu(\nu)$ [2,18]

$$G(t) = \int_0^\infty H_\nu(\nu) e^{-t\nu} d\nu . \quad (1)$$

Łatwo zauważyć, że $H_\tau(\tau) = 1/\tau^2 \cdot H_\nu(1/\tau)$. Funkcje $H_\tau(\tau)$ i $H_\nu(\nu)$ opisujące rozkłady czasów τ i częstotliwości ν relaksacji, charakteryzują frakcje elementów uogólnionego ciągłego modelu Maxwella [2] o czasach oraz częstotliwościach relaksacji zawierających się, odpowiednio, pomiędzy τ a $\tau + d\tau$ i ν a $\nu + d\nu$.

Analizując strukturę równania (1) łatwo zauważyć, że moduł relaksacji $G(t)$ jest równy transformacie Laplace'a spektrum częstotliwości relaksacji $H_\nu(\nu)$ dla t rzeczywistego. Zatem problem identyfikacji $H_\nu(\nu)$ jest równoważny problemowi wyznaczania oryginału Laplace'a z $G(t)$ w oparciu o dane eksperymentalne dostępne dla t rzeczywistego. W literaturze znane są metody numeryczne wyznaczania odwrotnej transformaty Laplace'a w oparciu o dane z płaszczyzny zespolonej, na przykład szeroko stosowana metoda Talbota [17], brak jest natomiast metod obliczeniowych wyznaczania oryginału Laplace'a dla danych z osi rzeczywistej. Jak wiadomo, zadanie to jest źle postawionym problemem odwrotnym [19], jego rozwiązanie wymaga stosowania specjalnych metod. W tej pracy proponujemy metodę identyfikacji spektrum relaksacji opartą o aproksymację funkcji $H_\nu(\nu)$ szeregiem uogólnionych wielomianów Laguerre'a.

Aproksymacja spektrum relaksacji

Wielomiany Laguerre $L_k(\nu)$ [12]

$$L_k(\nu) = \sqrt{\alpha} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-\alpha\nu)^{k-j}}{(k-j)!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

tworzą układ zupełny w przestrzeni $L_2(0, \infty)$ funkcji mierzalnych i całkowalnych z kwadratem w przedziale $(0, \infty)$. Spektrum relaksacji $H_\nu(\nu)$ można, więc rozwinąć w nieskończony szereg

$$H_\nu(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k L_k(\nu).$$

Spektrum relaksacji $H_\nu(\nu)$ będziemy przybliżać za pomocą K pierwszych składników tego szeregu, czyli szeregiem skończonym postaci

$$H_{\nu,K}(\nu) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k L_k(\nu). \quad (2)$$

Oznacza to przybliżenie modułu relaksacji $G(t)$ funkcją

$$G_K(t) = \int_0^{\infty} H_{\nu,K}(\nu) e^{-t\nu} d\nu = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \phi_k(t), \quad (3)$$

gdzie [15]

$$\phi_k(t) = \int_0^{\infty} L_k(\nu) e^{-t\nu} d\nu = \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right)^k. \quad (4)$$

Będziemy zakładać, że przeprowadzono skończony eksperyment dyskretny i zarejestrowano pomiary $\overline{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$ modułów relaksacji $G(t_i)$ w chwilach czasu $t_i > 0$, gdzie $z(t_i)$ jest addytywnym błędem pomiaru. Rezultatem eksperymentu jest więc zbiór par $\{t_i, \overline{G}(t_i)\}$, $i = 1, \dots, N$.

Jako miarę dokładności modelu (3) zastosujemy wskaźnik kwadratowy [6,7]

$$Q_N(g_K) = \sum_{i=1}^N [\overline{G}(t_i) - G_K(t_i)]^2, \quad (5)$$

gdzie: $g_K = [g_0 \dots g_{K-1}]^T$ jest K elementowym wektorem nieznanych współczynników modelu (2) lub równoważnie (3).

Definiując $N \times K$ wymiarową macierz

$$\Phi_{N,K} = \begin{bmatrix} \phi_0(t_1) & \phi_1(t_1) & \dots & \phi_{K-1}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(t_N) & \phi_1(t_N) & \dots & \phi_{K-1}(t_N) \end{bmatrix}$$

wskaźnik jakości (5) można zapisać w postaci

$$Q_N(g_K) = [\overline{G}_N - \Phi_{N,K} g_K]^T [\overline{G}_N - \Phi_{N,K} g_K], \quad (6)$$

gdzie: $\overline{G}_N = [\overline{G}(t_1) \dots \overline{G}(t_N)]^T$ jest wektorem pomiarów modułów relaksacji.

Problem wyznaczenia ciągłego spektrum relaksacji sprowadza się więc do rozwiązania następującego zadania optymalizacji statycznej

$$Q_N(g_K) \rightarrow \min_{g_K \in R^K}, \quad (7)$$

a więc do klasycznego problemu minimalizacji sumy kwadratów, którego rozwiązanie dane jest znanym układem równań normalnych

$$\Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K} g_K = \Phi_{N,K}^T \overline{G}_N. \quad (8)$$

Macierz $\Phi_{N,K}$, a w konsekwencji również macierz $\Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K}$ jest w rozważanym zadaniu macierzą niepełnego rzędu, rozwiązanie liniowego układu równań (8) nie jest więc jednoznaczne i równocześnie nawet bardzo małe zmiany wektora

pomiarów $\bar{G}_N$ (zazwyczaj obciążonych błędami) i macierzy $\Phi_{N,K}$ mogą spowodować dowolnie duże zmiany rozwiązania g_K [10]. Zadanie (7) lub równoważnie (8) jest więc zadaniem źle postawionym w sensie Hadamarda [19]. Jedną z metod pozwalających wyeliminować zarówno niejednoznaczność jak i nieciągłość rozwiązania zadania (7) jest taka modyfikacja funkcji celu (6), która bez zmiany dziedziny zadania prowadzi do zadania dobrze postawionego o rozwiązaniu bliskim rozwiązaniu zadania oryginalnego, czyli jego regularyzacja.

Tichonow [19] zaproponował metodę regularyzacji polegającą na stabilizacji zadania (7) poprzez minimalizację zmodyfikowanego wskaźnika jakości

$$Q_N(g_K) + \beta g_K^T g_K \rightarrow \min_{g_K \in R^K}, \quad (9)$$

gdzie: $\beta > 0$ jest parametrem regularyzacji.

Zadanie (9) posiada rozwiązanie jednoznaczne g_K^β dane wzorem

$$g_K^\beta = (\Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K} + \beta I_{K,K})^{-1} \Phi_{N,K}^T \bar{G}_N, \quad (10)$$

gdzie $I_{K,K}$ jest $K \times K$ wymiarową macierzą jednostkową.

Wzór (10) ma znaczenie głównie teoretyczne, dla efektywnego wyznaczenia macierzy odwrotnej w (10) zastosujemy technikę dekompozycji względem wartości szczególnych, w skrócie SVD [9,10]. Na gruncie statystyki matematycznej rozkład SVD nazywany jest dekompozycją według wartości osobliwych [14].

Podstawy algebraiczne algorytmu

Rozkład SVD $K \times K$ wymiarowej symetrycznej macierzy

$$\Psi_{K,K} = \Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K} \quad (11)$$

przyjmuje postać

$$\Psi_{K,K} = V \Sigma V^T, \quad (12)$$

gdzie: $V \in R^{K,K}$ jest macierzą ortonormalną (tzn. $V^T V = V V^T = I_{K,K}$), natomiast $\Sigma \in R^{K,K}$ jest macierzą diagonalną utworzoną z wartości szczególnych $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ macierzy $\Psi_{K,K}$ postaci $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$, gdzie $r = \text{rzqd}(\Psi_{K,K})$.

W oparciu o (10), (11) i (12) otrzymujemy

$$g_K^\beta = [V \Omega_\beta V^T]^{-1} \Phi_{N,K}^T \bar{G}_N,$$

gdzie: $\Omega_\beta = \text{diag}(\sigma_1 + \beta, \dots, \sigma_r + \beta, \beta, \dots, \beta) \in R^{K,K}$.

Ponieważ $(V^T)^{-1} = V$, $V^{-1} = V^T$ a macierz Ω_β jest dla $\beta > 0$ macierzą nieosobliwą wektor g_K^β dany jest ostatecznie wzorem

$$g_K^\beta = V \Omega_\beta^{-1} V^T \Phi_{N,K}^T \bar{G}_N, \quad (13)$$

gdzie:

$$\Omega_\beta^{-1} = \text{diag}(1/(\sigma_1 + \beta), \dots, 1/(\sigma_r + \beta), 1/\beta, \dots, 1/\beta). \quad (14)$$

Algorytm wyznaczenia macierzy odwrotnej w (10) można także oprzeć o rozkład *SVD* $N \times K$ wymiarowej macierzy $\Phi_{N,K}$, jednak zastosowanie rozkładu *SVD* do $K \times K$ wymiarowej, symetrycznej i dodatnio półokreślonej macierzy $\Psi_{K,K}$ upraszcza algorytm *SVD*, a przede wszystkim istotnie redukuje rozmiar zadania, zazwyczaj bowiem $K \ll N$.

WYNIKI I DYSKUSJA

Analiza zbieżności

Rozwiązanie zregularyzowane g_K^β stanowi jedynie przybliżenie rozwiązania normalnego wyjściowego układu równań normalnych (8) jakie uzyskalibyśmy dla pomiarów dokładnych $g_K^N = \Phi_{N,K}^+ G_N$, gdzie $G_N = [G(t_1) \dots G(t_N)]^T$ a $\Phi_{N,K}^+$ oznacza uogólnioną macierz odwrotną Moore'a-Penrose'a macierzy $\Phi_{N,K}$ [9,10]. Dokładność rozwiązania zregularyzowanego zależy w szczególności od wartości parametru β oraz dokładności pomiarów, jej ocenę umożliwiają następujące własności.

Niech $\Phi_{N,K} = U \Sigma_1 V^T$ będzie rozkładem *SVD* macierzy $\Phi_{N,K}$, macierz V jest tożsąca z macierzą V w rozkładzie (11) macierzy $\Psi_{K,K}$, ortonormalna macierz $U \in R^{N,N}$ a $\Sigma_1 = \text{diag}(\sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_r}, 0, \dots, 0) \in R^{N,K}$ [9,10].

A. Dokładny pomiar modułu relaksacji

Przypadek ten ma znaczenie głównie teoretyczne, w praktyce bowiem pomiary modułów relaksacji w dziedzinie czasu prawie zawsze obciążone są błędami [19].

Własność 1 [15]. Błąd rozwiązania zregulowanego g_K^β spełnia nierówność

$$\|g_K^\beta - g_K^N\|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i(\sigma_i + \beta)^2} \beta^2 (u_i^T G_N)^2 < \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i^3} \beta^2 \|G_N\|^2$$

gdzie $U = [u_1 \dots u_N]$ a $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową w przestrzeniach R^K lub R^N .

Własność 2 [15]. Dla rozwiązania zregulowanego g_K^β zachodzi równość

$$Q_N(g_K^\beta) = Q_N(g_K^N) + \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2}{(\beta + \sigma_i)^2} (u_i^T G_N)^2$$

Z własności 1 wynika wprost, że rozwiązanie zregulowane g_K^β dąży do rozwiązania normalnego g_K^N liniowo, gdy $\beta \rightarrow 0^+$. Podobnie własność 2 oznacza, że błąd modelu zregulowanego $e_N^\beta = G_N - \Phi_{N,K} g_K^\beta$ dąży do błędu modelu normalnego $e_N^N = G_N - \Phi_{N,K} g_K^N$ liniowo, gdy $\beta \rightarrow 0^+$.

Zarówno błąd rozwiązania zregulowanego g_K^β jak i wskaźnik jakości identyfikacji $Q_N(g_K^\beta)$ są funkcjami rosnącymi parametru regularyzacji β . Przebieg zmienności obu funkcji dla danych z przedstawionego poniżej przykładu przedstawia rysunek 2.

B. Zakłócony pomiar modułu relaksacji

Będziemy zakładać, że $\|z_N\| = \|\bar{G}_N - G_N\| = \delta$, gdzie $z_N = [z(t_1) \dots z(t_N)]^T$.

Własność 3 [15]. Błąd rozwiązania zregulowanego g_K^β spełnia nierówność

$$\|g_K^\beta - g_K^N\| < \sqrt{\gamma} \beta \|\bar{G}_N\| + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \delta \quad (15)$$

gdzie: $\gamma = \sum_{i=1}^r 1/\sigma_i^3$.

W tym przypadku rozwiązanie zregularyzowane obciążone jest więc niezerowym błędem stabilizacji $\|g_K^\beta - g_K^N\|$ nawet wówczas, gdy $\beta \rightarrow 0^+$.

Dobór parametru regularyzacji

Z powodów obliczeniowych dobór parametru regularyzacji *a priori* nie jest strategią zbyt użyteczną. Bardziej odpowiednią strategią jest dobór parametru β *a posteriori*, dokonywany w trakcie obliczeń zależnie od ich wyników. W literaturze rozważa się kilka strategii doboru parametru β [3,11]. Tutaj proponujemy prostą regułę gwarantującą minimum wartości górnego oszacowania błędu rozwiązania zregularyzowanego $\|g_K^\beta - g_K^N\|$.

Ponieważ $\|G_N\| \leq \|\bar{G}_N\|$ w oparciu o (15) problem doboru parametru regularyzacji przybiera postać

$$\beta^* = \arg \min_{\beta > 0} \left[\mu(\beta) = \sqrt{\gamma} \beta \|\bar{G}_N\| + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \delta \right]. \quad (16)$$

Dla każdego $\delta > 0$ funkcja $\mu(\beta)$ jest ściśle wypukłą, problem (16) posiada więc rozwiązanie jednoznaczne dane wzorem

$$\beta^* = \frac{\sqrt[3]{\delta^2}}{\sqrt[3]{16\gamma} \sqrt[3]{\|\bar{G}_N\|^2}}. \quad (17)$$

Algorytm

Krok 1: Wyznacz eksperymentalnie pomiary $\bar{G}(t_i)$ modułu relaksacji w chwilach czasu t_i , $i=1, \dots, N$.

Krok 2: Oblicz macierz $\Phi_{N,K}$ a następnie macierz $\Psi_{K,K}$.

Krok 3: Wyznacz rozkład SVD macierzy $\Psi_{K,K}$.

Krok 4: Dobierz parametr regularyzacji β^* zgodnie z (17).

Krok 5: Wyznacz diagonalną macierz odwrotną Ω_β^{-1} zgodnie z (14).

Krok 6: Wyznacz rozwiązanie zregularyzowane g_K^β dane wzorem (13).

Krok 7: Wyznacz spektrum częstotliwości relaksacji $H_{v,K}(\nu)$ zgodnie z (2).

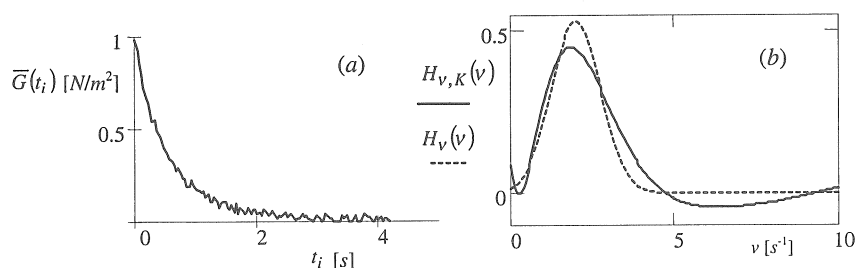
Rozkład macierzy $\Psi_{K,K}$ względem wartości szczególnych jest z obliczeniowego punktu widzenia głównym krokiem algorytmu. Procedury *SVD* są dostępne w prawie każdym pakiecie obliczeniowym. Badania numeryczne wskazują, że najlepsze rezultaty gwarantuje dobór parametru $\alpha \in [0,2; 0,3]$. We wszystkich przetestowanych przykładach dobór $K \in [20; 50]$ elementów szeregu (2) gwarantował dobrą jakość aproksymacji.

Przykład numeryczny

Rozważmy ośrodek lepkosprężysty, którego spektrum relaksacji dane jest rozkładem Gaussa postaci

$$H_\nu(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\rho^2}\right), \quad \nu_0 = 2, \quad \rho = \frac{3}{4}$$

Przebieg modułu relaksacji z addytywnymi błędami pomiarowymi przedstawia rysunek 1a. Przyjęto zakłócenia losowe dane rozkładem jednostajnym w przedziale $[-0,025; 0,025]$. Na rysunku 1b przedstawiono przebieg „rzeczywistego” spektrum relaksacji $H_\nu(\nu)$ oraz jego przybliżenia $H_{v,K}(\nu)$ dla parametru $\beta^* = 0,00104$ dobrane zgodnie z regułą (17).



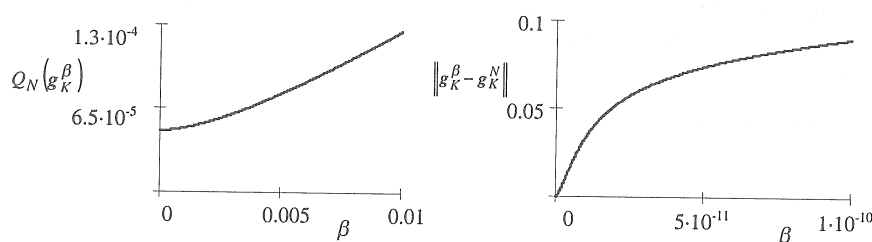
Rys. 1a. Przebieg modułu relaksacji $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$ z zakłóceniami pomiarowymi

Rys. 1b. Spektrum relaksacji $H_\nu(\nu)$ (linia przerywana) i przybliżenie $H_{v,K}(\nu)$ (linia ciągła) dla współczynnika regularyzacji: $\beta^* = 0.00104$

Fig. 1a. Relaxation modulus $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$ corrupted by additive noise

Fig. 1b. Relaxation spectrum $H_\nu(\nu)$ (dash line) and computed approximation $H_{v,K}(\nu)$ (solid line) for regularization parameter $\beta^* = 0.00104$

Zależność wskaźnika jakości identyfikacji $Q_N(g_K^\beta)$ oraz normy $\|g_K^\beta - g_K^N\|$ od parametru β , jakie uzyskalibyśmy dla dokładnych danych pomiarowych, przedstawia rysunek 2. W przykładzie przyjęto $N=100$, $K=35$ oraz $\alpha=0,3$.



Rys. 2. Zależność wskaźnika identyfikacji $Q_N(g_K^\beta)$ oraz normy $\|g_K^\beta - g_K^N\|$ od parametru regularyzacji β

Fig. 2. Identification index $Q_N(g_K^\beta)$ and standards $\|g_K^\beta - g_K^N\|$ versus regularization parameter β

WNIOSKI

1. Aproksymacja funkcji $H_v(v)$ skończonym szeregiem wielomianów pozwoliła sprowadzić problem identyfikacji spektrum relaksacji $H_v(v)$ do problemu optymalizacji statycznej. Zastosowanie wielomianów Laguerre, dla których całki (4) przyjmują zwartą analityczną postać, pozwoliło także, co szczególnie istotne w kontekście źle postawionego problemu odwrotnego, uniknąć błędów przybliżeń kwadratur numerycznego całkowania, występujących w znanych algorytmach [3,13] wyznaczania ciągłego spektrum relaksacji.

2. Algorytm zapewnia wygładzenie rozwiązania g_K^β bowiem regularyzacja została zastosowana do zadania najmniejszych kwadratów (7), posiada jednak typowe wady algorytmów aproksymacji wielomianowej. Badania numeryczne wskazują, że algorytm zapewnia dobre rezultaty dla częstotliwości $v \leq 10^3$ i gorsze dla większych częstotliwości. W przypadku, gdy rozkład częstotliwości relaksacji jest dwumodalny, metoda zapewnia lepszą aproksymację mniejszych częstotliwości.

3. Procedurę można także rozszerzyć o nadrzędny moduł odpowiedzialny za dobór optymalnego parametru α , co prowadzi do dwupoziomowej struktury algorytmu identyfikacji [6].

4. Wynik identyfikacji, czyli wyznaczone spektrum relaksacji, zależy oczywiście zarówno od przyjętego modelu (2), w szczególności od K , przyjętego kryterium jakości (5) jak i od konkretnych danych pomiarowych $\{t_i, \overline{G}(t_i)\}$. Oszacowanie spektrum relaksacji asymptotycznie (dla $N \rightarrow \infty$) niezależne od momentów czasu $\{t_i\}$ można uzyskać stosując schemat randomizacji eksperymentu zaproponowany w pracy [7].

PIŚMIENNICTWO

1. **Anderssen R. S.:** Simple moving-average formulae for the direct recovery of the relaxation spectrum. *J. Rheol.*, 45, 1-27, 2001.
2. **Christensen R. M.:** Theory of Viscoelasticity. An Introduction. Academic Press, New York, 1971.
3. **Elster C., Honerkamp J., Weese J.:** Using regularization methods for the determination of relaxation and retardation spectra of polymeric liquids. *Rheological Acta*, 30, 161-174, 1991.
4. **Fujihara S., Yamamoto R., Masuda Y.:** Maxwellian Spectra of Stress Relaxation in the Cell Wall and Growth Regulation in Higher Plants. *Proc. of Int. Workshop Stress Relaxation in Solids and Biological Origin*, 47-51, Prague, 1995.
5. **Gólański K.:** Charakterystyki lepkosprężyste korzeni marchwi w szerokim zakresie prędkości obciążeń mechanicznych. *Rozprawy naukowe AR*, Lublin, 216, 1998.
6. **Hasiewicz Z., Stankiewicz A.:** On a two-level identification scheme of large-scale systems for open-loop steady-state optimization. *Int. J. Systems Sci.*, 15, 1111-1130, 1984.
7. **Hasiewicz Z., Stankiewicz A.:** On Input-Independent System Identification by Monte-Carlo Approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 30, 480-483, 1985.
8. **Hellebrand H. J.:** Comparison of Models for Evaluation of Stress Relaxation. *Proc. of Int. Workshop Stress Relaxation in Solids and Biological Origin*, 3-10, Prague, 1995.
9. **Kaczorek T.:** Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa, 1998.
10. **Kielbasiński A., Schwetlick H.:** Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych. WNT, Warszawa, 1992.
11. **Nair M. T., Hegland M., Anderssen R. S.:** The trade-off between regularity and stability of Tikhonov regularization. *Mathematics of Computation*, 66, 193-206, 1997.
12. **Pang T.:** Metody obliczeniowe w fizyce. PWN, Warszawa, 2001.
13. **Paulson K. S., Jouravleva S., McLeod C. N.:** Dielectric Relaxation Time Spectroscopy. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 47, 1510-1517, 2000.
14. **Rao C. R.:** Modele liniowe statystyki matematycznej. PWN, Warszawa, 1982.
15. **Stankiewicz A.:** Aproksymacja spektrum relaksacji materiałów lepkosprężystych wielomianami Laguerre'a. *Akademia Rolnicza*, Lublin, 2003 (praca niepublikowana).
16. **Syed Mustapha S. M. F. D., Phillips T. N.:** A dynamic nonlinear regression method for the determination of the discrete relaxation spectrum. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 33, 1219-1229, 2000.
17. **Talbot A.:** The Accurate Numerical Inversion of Laplace Transforms. *J. Inst. Math. Appl.*, 23, 1979.
18. **Ter Haar D.:** A Phenomenological Theory of Visco-Elastic Behaviour. *I. Physica*, XVI, 719-737, 1950.
19. **Tikhonov A. N., Arsenin V. Y.:** Solutions of Ill-posed Problems. Wiley, New York, 1977.
20. **Winter H. H.:** Analysis of dynamical mechanical data: inversion into a relaxation time spectrum and consistency check. *J. Non-Newtonian Mech.*, 68, 225-239, 1997.

COMPUTATIONAL SCHEME FOR THE IDENTIFICATION
OF THE RELAXATION SPECTRUM OF VISCOELASTIC
PLANT MATERIALS

Anna Stankiewicz, Krzysztof Gołacki

Department of Technical Science, University of Agriculture
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: astan@hortus.ar.lublin.pl

Abstract. A new algorithm for the direct recovery of a continuous spectrum of relaxation frequencies from time-measurements of relaxation modulus is proposed. The identification scheme is based on the least-squares approximation of the relaxation spectrum by finite series of Laguerre polynomials. Tikhonov regularization is used to guarantee the stability of the scheme. The numerical realization of the scheme by using singular value decomposition (*SVD*) is discussed and the resulting computer algorithm is outlined. An analysis of the model accuracy is conducted both for perfect and noise measurements and the linear rate of convergence is proved. Numerical calculations on model data are presented and discussed.

Keywords: relaxation spectrum, linear relaxation modulus, identification, Tikhonov regularization, Laguerre polynomials