

ADEKWATNOŚĆ OPISU REAKCJI MATERIAŁU ROŚLINNEGO  
NA OBCIĄŻENIA MECHANICZNE NA GRUNCIE LINIOWEJ  
TEORII LEPKOSPREŻYSTOŚCI

*Krzysztof A. Gołacki, Zbigniew Stropek*

Zakład Teorii Maszyn i Automatyki, Akademia Rolnicza, ul. Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin  
e-mail: [golacki@faunus.ar.lublin.pl](mailto:golacki@faunus.ar.lublin.pl)

**Streszczenie.** Praca zawiera opis wyprowadzania związków analitycznych oraz eksperymentów, które pozwoliły na wyznaczenie zmiennych w czasie wartości funkcji relaksacji naprężeń ściskających, współczynnika Poissona oraz modułu odkształcenia postaciowego i objętościowego opisujących zachowanie się tkanki korzenia marchwi pod obciążeniem. Wyznaczone przebiegi zmian wartości w czasie wyżej wymienionych parametrów w zależności od prędkości deformacji świadczą o odmiennym stanie wyjściowym materiału po odkształceniu. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów stwierdzono także wpływ prędkości deformacji wstępnej na parametry charakterystyk lepkosprężystych.

**Słowa kluczowe:** lepkosprężystość, współczynnik Poissona, moduł odkształcenia objętościowego, moduł odkształcenia postaciowego, marchew

#### WSTĘP

Pojęcie biomechaniki zostało zdefiniowane w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia przez Lissnera jako wykorzystanie podstawowych zasad mechaniki do opisu materiałów biologicznych jako żywych organizmów [7]. Obecnie chociaż chętniej używa się pojęcia bioinżynieria problemy pozostają te same. Wszelkiego rodzaju uszkodzenia mechaniczne materiałów roślinnych powstające na skutek udarów powodują znaczne straty ilościowe i jakościowe.

Charakterystyki lepkosprężyste są uznanym i szeroko stosowanym narzędziem identyfikacji cech mechanicznych materiałów roślinnych. Dotyczy to badań zajmujących się określeniem przyczyn powstawania uszkodzeń, a także oceny konsumpcyjnej i przechowalniczej. Wyznacza się je również podczas badań mechanizmów pochłaniania energii podczas obciążeń udarowych.

Zwykle w pierwszym przybliżeniu opisu reakcji uwodnionego materiału roślinnego pod obciążeniem mechanicznym przyjmowano jego nieściśliwość co oznaczało założenie  $K = \infty$ . W kolejnym etapie badań przyjmowano sprężystość materiału we wszystkich kierunkach, co wiązało się ze stałą wartością modułu odkształcenia objętościowego. Ostatnim etapem, który prezentujemy w pracy, jest założenie lepkosprężystości materiału ( $K$  zmienne w czasie), co pozwala opisać zmienny w czasie stan naprężeń i odkształceń w dowolnym punkcie i wzdłuż dowolnego kierunku.

#### METODA BADAWCZA

Eksperyment polegał na rejestracji zjawiska relaksacji naprężeń w dwóch walcowych próbkach marchwi odmiany Perfekcja o średnicy i wysokości 20 mm, które ściskano wstępnie wzdłuż osi o wartość 1 mm w warunkach stanu jednoosiowego naprężenia i stanu jednoosiowego odkształcenia. Badania przeprowadzono dla różnych prędkości deformacji wstępnej z zakresu od  $1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  do  $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Do opisu zachowania się materiału roślinnego pod obciążeniem użyto czteroparametrowego modelu Maxwella, który bardzo dobrze opisuje zjawisko relaksacji naprężeń. W przyjętym modelu na podstawie obserwacji własnych i doniesień literaturowych odrzucono zastosowanie w połączeniu równoległym dodatkowych gałęzi zawierających oddzielnie element sprężysty i element lepki. Reakcja badanych próbek na gwałtownie przyłożone wymuszenie nie miała cech ciała sztywnego, co nie przemawiało za włączeniem elementu lepkiego (tłumika). Jednocześnie wartość siły reakcji ma tendencję spadku do zera w dłuższym czasie trwania testu (kilka godzin) [3] dlatego zastosowanie elementu sprężystego nie jest wskazane.

Niewłaściwym jest także założenie wymuszenia zadawanego próbce jako funkcji skoku gdyż nie uwzględnia się wówczas relaksacji naprężeń mającej miejsce podczas narastania odkształcenia [9].

W przyjętym czteroparametrowym modelu Maxwella w postaci warunków brzegowych uwzględniono kształt próbki i kierunek jej obciążenia. Wykorzystano wzór podany przez Chena [1] na siłę reakcji walcowej próbki ściskanej wzdłuż osi:

$$F(t) = \sum_{i=1}^2 \left( \int_0^{t_m} \frac{P}{l} \cdot v \cdot E_i \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i} \cdot (t_m - t)} \cdot dt \right) \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i} \cdot (t - t_m)} \quad (1)$$

gdzie:  $p$  – pole przekroju poprzecznego,  $v$  – prędkość deformacji,  $l$  – wysokość próbki,  $E_i$ ,  $\eta_i$  – współczynniki sprężystości i lepkości zastosowanego modelu,  $t_m$  – czas narastania odkształcenia,  $t$  – czas liczony od chwili rozpoczęcia odkształcania próbki.

Wzór (1) opisuje drugą fazę testu, w której utrzymywano stałe odkształcenie ( $t > t_m$ ). W tym wzorze uwzględniono także prędkość deformacji, co jest jednoznaczne z uwzględnieniem relaksacji naprężeń mającej miejsce w założonym modelu próbki już w czasie narastania odkształcenia. Otrzymane w wyniku eksperymentu przebiegi siły reakcji próbek aproksymowano formułami empirycznymi o postaci:

$$F(t) = \sum_{i=1}^2 A_i \cdot e^{-\alpha_i \cdot t} \quad (2)$$

gdzie:  $A_i$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) są nieznanymi parametrami.

Do wyznaczenia wartości parametrów  $A_i$  i  $\alpha_i$  dwuskładnikowej funkcji wykładniczej wykorzystano metodę minimalizacji nieliniowej quasi-Newtona.

Na podstawie wzoru (1) i danych eksperymentalnych obliczono wartości współczynników  $E_i$  i  $\eta_i$  dla próbek ściskanych swobodnie i w cylindrach przy różnych prędkościach deformacji wstępnej. Umożliwia to wyznaczenie funkcji relaksacji odpowiadających stanowi jednoosiowego naprężenia –  $E(t)$  i stanowi jednoosiowego odkształcenia –  $X(t)$ .

$$E(t) = A \cdot \exp(-a \cdot t) + B \cdot \exp(-b \cdot t) \quad (3)$$

$$X(t) = C \cdot \exp(-c \cdot t) + D \cdot \exp(-d \cdot t) \quad (4)$$

gdzie:  $A, B, C, D, a, b, c, d$  są stałymi o wartościach dodatnich.

Dokonując przekształceń Laplace'a funkcji relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$  wylicza się transformaty Laplace'a  $E(s)$  i  $X(s)$ :

$$E(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \quad (5)$$

$$X(s) = \frac{C}{s+c} + \frac{D}{s+d} \quad (6)$$

gdzie:  $s$  – zmienna zespolona.

Korzystając z reguły analogii Christensena [2], można zastosować wzór wyprowadzony przez Hughesa i Segerlinda [6] na stały współczynnik Poissona do rozwiązania problemu w lepkosprężystości, zastępując moduł sprężystości w rozwiązaniu sprężystym przez iloczyn zmiennej zespolonej  $s$  i transformaty Laplace'a odpowiedniej funkcji relaksacji naprężeń. Korzystając z powyższych założeń transformata współczynnika Poissona wyraża się następującym wzorem:

$$\mu(s) = \frac{1}{4 \cdot s} \cdot \left[ \frac{E(s)}{X(s)} - 1 + \left[ \left( \frac{E(s)}{X(s)} - 1 \right)^2 - 8 \cdot \left( \frac{E(s)}{X(s)} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7)$$

Znając transformatę współczynnika Poissona można określić jego przebieg w czasie poprzez zastosowanie do obu stron równania odwrotnego przekształcenia Laplace'a.

Ostateczny wzór na współczynnik Poissona ma postać [4,5]:

$$\mu(t) = (1 - \sqrt{M}) \cdot v1(t) - \sqrt{M} \cdot \int_0^t v1(\tau) \cdot wm(t - \tau) d\tau \quad (8)$$

$M$  – jest to iloraz współczynników przy najwyższej potędze zmiennej w wielomianach występujących w liczniku i mianowniku funkcji wymiernej znajdującej się pod pierwiastkiem,  $v1(t)$  – wyrażenie będące sumą trzech funkcji wykładniczych i składnika stałego,  $wm(t)$  – funkcja będąca podwójnym splotem wyrażen znajdujących się pod pierwiastkiem.

Znając transformaty Laplace'a  $E(s)$  i  $X(s)$  końcowy wzór na transformatę Laplace'a modułu odkształcenia postaciowego ma postać:

$$G(s) = \frac{\left[ \frac{E(s)}{2} + \frac{3 \cdot X(s)}{2} \right] - \left[ \left[ \frac{E(s)}{2} + \frac{3 \cdot X(s)}{2} \right]^2 - 4 \cdot X(s) \cdot E(s) \right]^{\frac{1}{2}}}{4} \quad (9)$$

Aby wyznaczyć oryginał  $G(t)$  transformaty  $G(s)$  należy zastosować przekształcenie odwrotne Laplace'a do obu stron równania (9).

Wzory końcowe na zmienny w czasie moduł odkształcenia postaciowego i moduł odkształcenia objętościowego mają postać [8]:

$$G(t) = p(t) - \sqrt{M} \cdot n(t) - \sqrt{M} \cdot \int_0^t n(\tau) \cdot wm(t - \tau) d\tau \quad (10)$$

$$K(t) = X(t) - \frac{4}{3} \cdot G(t) \quad (11)$$

$p(t)$ ,  $n(t)$  – wyrażenia będące sumą czterech funkcji wykładniczych.

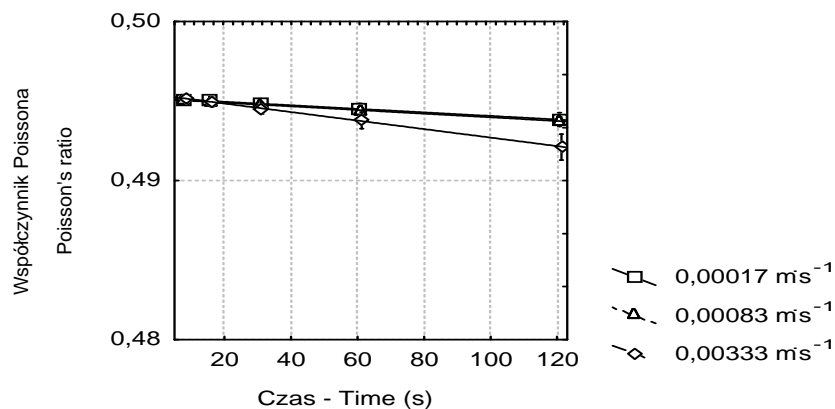
## WYNIKI I DYSKUSJA

Wyznaczone zależności mogą stanowić podstawę do analizy adekwatności opisu zachowania się korzeni marchwi pod obciążeniem przy użyciu teorii liniowej lepkosprężystości. Ze względu na nieodwracalny charakter procesów zachodzących w badanych materiałach, szczególnie w fazie gwałtownego narastania odkształcenia, wykorzystanie modeli lepkosprężystych do opisu pierwszej fazy testu wydaje się obarczone dużym błędem. Druga faza testu polegająca na stopniowym zaniku naprężeń faktycznie charakteryzuje materiał po wstępnej deformacji, a zatem zmieniony w stosunku do jego stanu przed testem.

W tym przypadku model lepkosprężysty opisuje skutki obciążeń, które mogą być zadawane w różny sposób, np. w formie uderów.

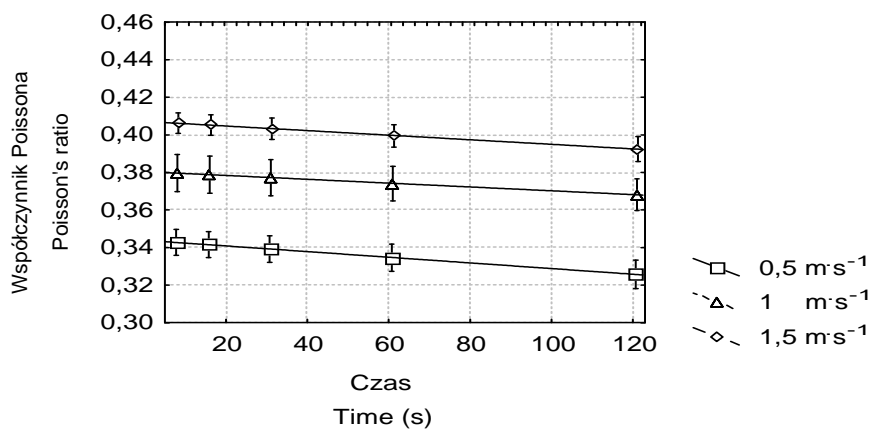
Rysunki przedstawiają zmianę w czasie modułów odkształcenia objętościowego i postaciowego oraz współczynnika Poissona po 7,5 sekundach od chwili wystąpienia najwyższej siły reakcji podczas testu relaksacji. Przebieg zmian wartości w czasie wyżej wymienionych parametrów w zależności od prędkości deformacji świadczy o różnym stanie zdeformowania próbek, a jednocześnie odmiennym stanie wyjściowym materiału po odkształceniu. Wynika to z nieodwracalnych procesów zachodzących w tkankach komórkowych, które związane są ze zjawiskami filtracji i przepompowywania soku komórkowego oraz pęknięciami ścian komórkowych i rozwarstwieniami struktury. Niestety nie opracowano dotychczas ilościowej metody oceny pęknięć wewnętrznych i zniszczeń tkanki komórkowej, która pozwoliłaby na bardziej wnikliwą analizę skutków deformacji.

W przypadku, gdy materiał roślinny zachowywałby się jak idealne ciało Maxwella uwzględnienie prędkości w modelu charakteryzującym liniowo lepkosprężyste zachowanie ciała biologicznego skutkowałoby uzyskaniem identycznych przebiegów w czasie wartości modułów odkształcenia objętościowego i postaciowego oraz współczynnika Poissona przy różnych prędkościach deformacji.



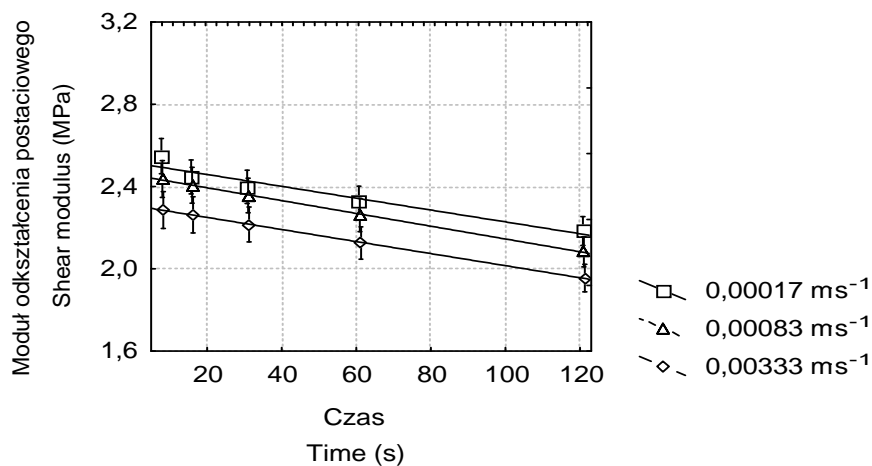
**Rys. 1.** Przebieg w czasie wartości współczynnika Poissona dla marchwi w warunkach obciążeń quasi-statycznych dla różnych prędkości deformacji wstępnej

**Fig. 1.** Changeability of Poisson's ratio in time for carrot root under quasi-static loading for different initial deformation rates



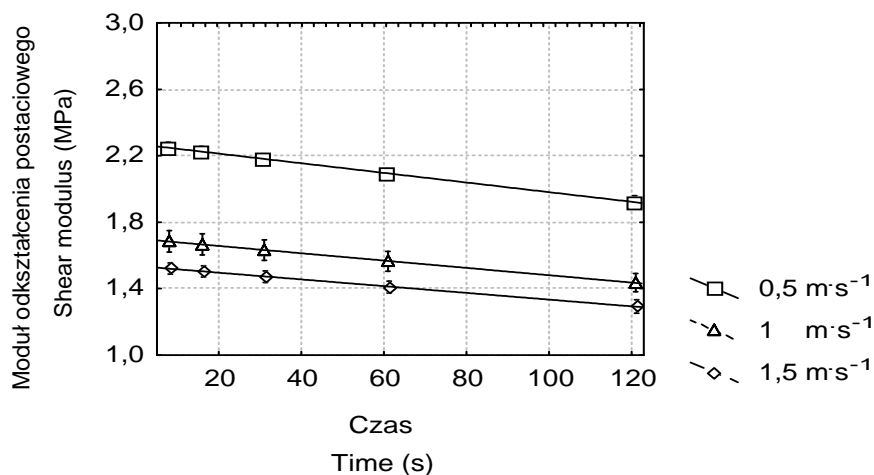
**Rys. 2.** Przebieg w czasie wartości współczynnika Poissona dla marchwi w warunkach obciążeń udarowych dla różnych prędkości deformacji wstępnej

**Fig. 2.** Changeability of Poisson's ratio in time for carrot root under impact loading for different initial deformation rates



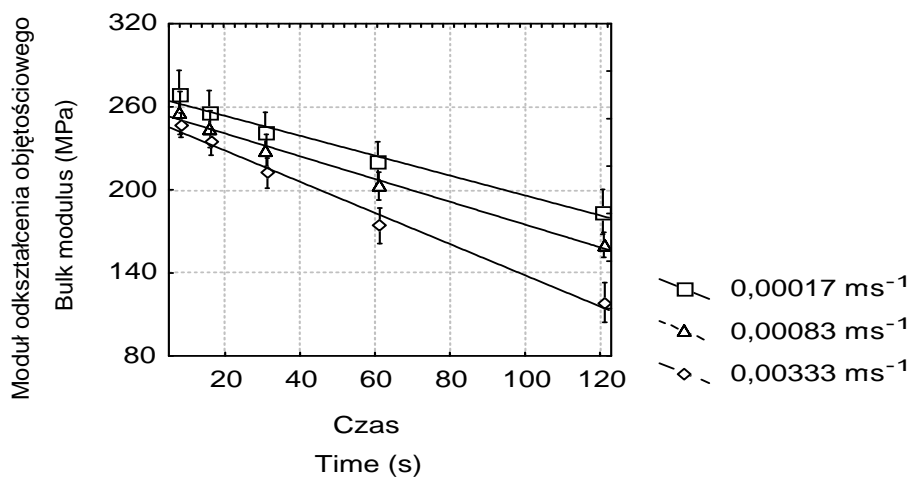
**Rys. 3.** Zmienność w czasie modułu odkształcenia postaciowego dla marchwi w quasi-statycznych warunkach obciążeń dla różnych prędkości deformacji wstępnej

**Fig. 3.** Changeability of shear modulus in time for carrot root under quasi-static loading for different initial deformation rates



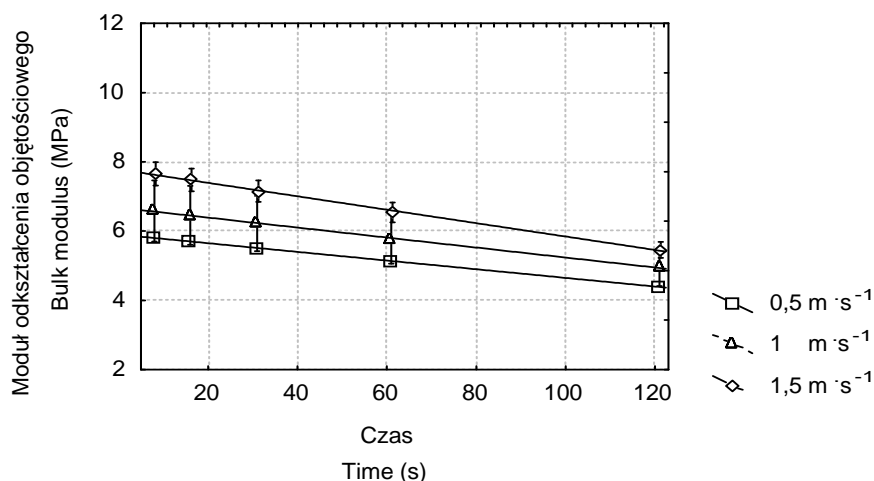
**Rys. 4.** Zmienność w czasie modułu odkształcenia postaciowego dla marchwi w uderowych warunkach obciążeń dla różnych prędkości deformacji wstępnej

**Fig. 4.** Changeability of shear modulus in time for carrot root under impact loading for different initial deformation rates



**Rys. 5.** Zmienność w czasie modułu odkształcenia objętościowego dla marchwi w quasi-staty-cznych warunkach obciążeń dla różnych prędkości deformacji wstępnej

**Fig. 5.** Changeability of bulk modulus in time for carrot root under quasi-static loading for different initial deformation rates



**Rys. 6.** Zmienność w czasie modułu odkształcenia objętościowego dla marchwi w uderzeniowych warunkach obciążeń dla różnych prędkości deformacji wstępnej

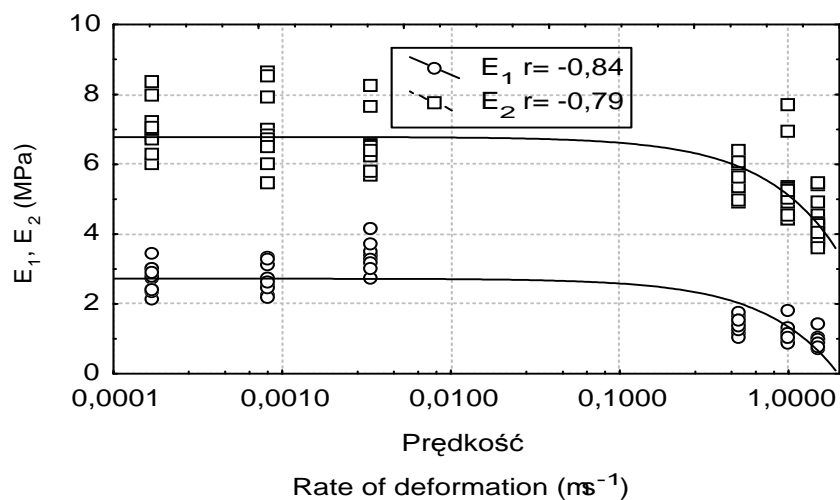
**Fig. 6.** Changeability of bulk modulus in time for carrot root under impact loading for different initial deformation rates

Ponieważ we wyprowadzonych zależnościach analitycznych uwzględniono prędkość zadawania deformacji we wstępnej fazie testu relaksacji naprężeń, w przypadku ciała idealnie liniowo lepkosprężystego należy się spodziewać identycznych wartości badanych wielkości dla różnych prędkości obciążenia. W wyniku przeprowadzonych eksperymentów stwierdzono wpływ prędkości deformacji wstępnej na parametry charakterystyk lepkosprężystych.

Rozpatrywano 6 prędkości, z których trzy pierwsze wartości odpowiadają quasi-statycznym warunkom obciążeń, a trzy następne obciążeniom uderzowym. Dla każdego rodzaju przeprowadzanego testu uzyskano wysoką korelację pomiędzy parametrami modelu, a prędkością deformacji wstępnej. Wartości modułów sprężystości i lepkości marchwi malały wraz ze wzrostem prędkości deformacji. Potwierdza to hipotezę o wzroście liczby uszkodzeń tkanki komórkowej wraz ze wzrostem prędkości zadawanego obciążenia, w wyniku czego materiał roślinny częściowo traci początkowe właściwości lepkosprężyste. Poniżej zostały przedstawione wykresy pokazujące zależność pomiędzy modułami sprężystości i lepkości dynamicznej a prędkością deformacji dla próbek marchwi.

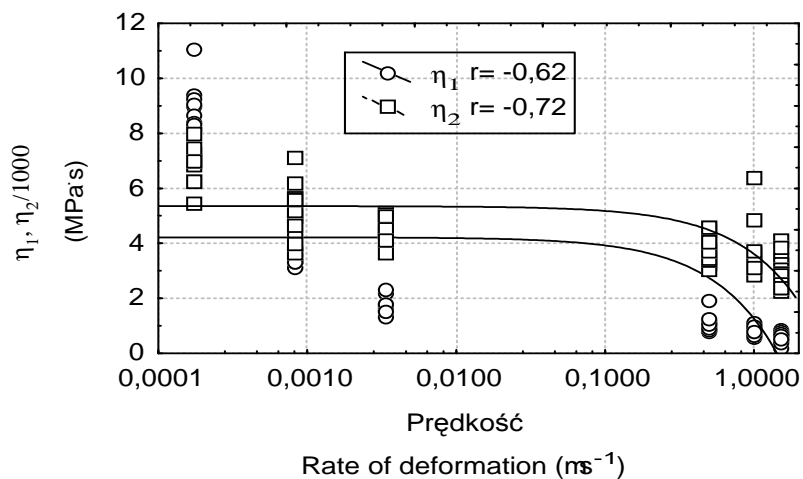
Na każdym rysunku podane są wartości współczynnika korelacji dla prostych regresji. Na osi odciętych zastosowano podziałkę logarytmiczną ze względu na duży zakres zastosowanych prędkości.





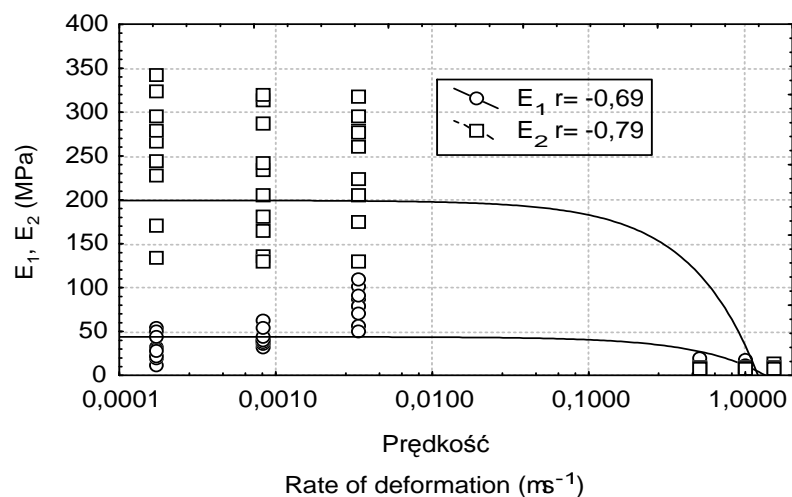
**Rys. 7.** Zależność parametrów  $E_i$  od prędkości deformacji dla próbek marchwi w stanie jednoosiowego naprężenia

**Fig. 7.** Dependence of  $E_i$  parameters on deformation rate for carrot samples in uniaxial stress state



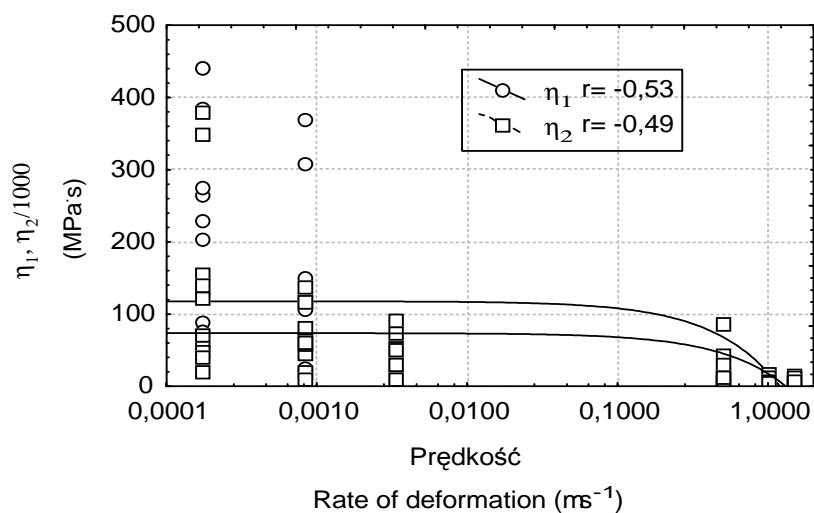
**Rys. 8.** Zależność parametrów  $\eta_i$  od prędkości deformacji dla próbek marchwi w stanie jednoosiowego naprężenia

**Fig. 8.** Dependence of  $\eta_i$  parameters on deformation rate for carrot samples in uniaxial stress state



**Rys. 9.** Zależność parametrów  $E_i$  od prędkości deformacji dla próbek marchwi w stanie jednoosiowego odkształcenia

**Fig. 9.** Dependence of  $E_i$  parameters on deformation rate for carrot samples in uniaxial strain state



**Rys. 10.** Zależność parametrów  $\eta_i$  od prędkości deformacji dla próbek marchwi w stanie jednoosiowego odkształcenia

**Fig. 10.** Dependence of  $\eta_i$  parameters on deformation rate for carrot samples in uniaxial strain state

### WNIOSKI

1. Moduły sprężystości i lepkości dynamicznej przyjętego modelu Maxwella dla marchwi malały wraz ze wzrostem prędkości deformacji, co dowodzi wyższej podatności na mikrouszkodzenia próbek oraz świadczy o nieodwracalnych zmianach zachodzących w materiale roślinnym wraz ze wzrostem prędkości obciążenia.

2. Uzyskane wyniki nie mogą stanowić dowodu na brak adekwatności opisu przebiegu relaksacji naprężeń w badanych próbkach na gruncie liniowej teorii lepkość sprężystości, gdyż dla różnych prędkości deformacji rejestrowano reakcje materiałów o różnym stopniu degradacji struktury wewnętrznej.

### PIŚMIENNICTWO

1. **Chen P., Fridley R.B.:** Analytical method of determining viscoelastic constants of agricultural materials. Transactions of the ASAE 15(6), 1103-1106, 1972.
2. **Christensen R.M.:** Theory of viscoelasticity. An introduction. Academic Press, New York, 1971.
3. **Finney E.E., Hall C.W., Mase G.E.:** Theory of linear viscoelasticity applied to the potato. Journal of Agr. Eng. Res., 9: 307-312, 1964.
4. **Gołacki K., Stankiewicz A.:** Algorytm obliczeniowy wyznaczania współczynnika Poissona lepkość sprężystego materiału roślinnego. Acta Agrophysica, 78, 51-61, 2002
5. **Gołacki K., Stropek Z.:** Metoda wyznaczania lepkość sprężystego współczynnika Poissona materiałów roślinnych w warunkach obciążeń uderowych. Acta Agrophysica, 45,79-83, 2001.
6. **Hughes H., Segerlind L.J.:** A rapid mechanical method for determining Poisson's ratio in biological materials. ASAE paper No. 72-310, ASAE, St. Joseph, MI 49085, 1972.
7. **Lissner H.R.:** Biomechanics- what is it? Mech. Engng., 85(1), 25, 1963.
8. **Stankiewicz A.:** Metoda wyznaczania oryginału transformaty Laplace'a funkcji wybranych postaci. Prace niepublikowane Zakładu Teorii Maszyn i Automatyki AR Lublin, 2000.
9. **Rumsey T.R., Fridley R.B.:** A method for determining the shear relaxation function of agricultural materials. Transaction of the ASAE, 20 (2), 386-389,392, 1977.

### ADEQUACY OF THE DESCRIPTION OF THE RESPONSE PLANT MATERIAL UNDER MECHANICAL LOADING ON THE BASIS OF LINEAR VISCOELASTICITY THEORY

*Krzysztof A. Gołacki, Zbigniew Stropek*

Department of Machine Theory and Automatics, University of Agriculture  
ul. Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin  
e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl

**Abstract.** This paper includes description of analytical relationships and experiments. Concerning stress relaxation test of carrot root samples it allowed to determine changeable in time stress relaxation functions, bulk modulus, shear modulus and Poisson's ratio describing behaviour of plant material treated as a linear viscoelastic body.

**Key words:** viscoelasticity, Poisson's ratio, bulk modulus, shear modulus, carrot