

WPLYW PRĘDKOŚCI DEFORMACJI NA WYBRANE CHARAKTERYSTYKI LEPKOSPŘŻYSTYCH MATERIAŁÓW ROŚLINNYCH

Krzysztof Gołacki, Anna Stankiewicz, Zbigniew Stropek

Zakład Teorii Maszyn i Automatyki, Akademia Rolnicza, ul. Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin
e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl

Streszczenie. W pracy, wychodząc z modelu Maxwella opisującego przebieg relaksacji naprężeń, pokazano wpływ prędkości deformacji na moduły sprężystości i współczynniki lepkości materiału o własnościach lepkospřżystych. Wykazano, że parametry te są monotonicznie malejącymi funkcjami prędkości deformacji. Rozważania teoretyczne znajdują potwierdzenie w wynikach eksperymentów przeprowadzonych w szerokim zakresie prędkości deformacji wstępnej, tzn. od $1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ do $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Eksperyment polegał na przeprowadzeniu testów ściskania i relaksacji naprężeń dla walcowych próbek ziemniaków i jabłek w stanach jednoosiowego naprężenia i jednoosiowego odkształcenia. Stwierdzono spadek wartości modułów sprężystości i współczynników lepkości wraz ze wzrostem prędkości deformacji, co świadczy o nieodwracalnym charakterze procesów zachodzących w materiale roślinnym wskutek przyłożonego obciążenia.

Słowa kluczowe: ziemniak, jabłko, lepkospřżystość, relaksacja naprężeń, model Maxwella, prędkość deformacji

WSTĘP

Reologiczne właściwości materiałów pochodzenia roślinnego takich jak owoce (jabłka, gruszki), warzywa korzeniowe (marchew, ziemniaki) oraz niektóre rośliny przemysłowe (burak cukrowy), od kilkudziesięciu lat opisywane są przez liniowe modele konstytutywne, zapewniające w zakresie niewielkich deformacji zadawalające przybliżenie ich własności mechanicznych [6]. Jakkolwiek w klasycznej teorii liniowych modeli reologicznych [2] parametry modeli nie zależą od prędkości deformacji, w praktyce nieodwracalny charakter zjawisk zachodzących w materiale roślinnym pod wpływem deformacji lub obciążenia często czyni to założenie zbyt daleko idącą idealizacją rzeczywistości, czego między innymi

dowodzą wyniki badań nad adekwatnością liniowych modeli lepkosprężystych przedstawione w pracy [5]. Podstawowym źródłem informacji o lepkosprężystych właściwościach materiałów roślinnych są moduły sprężystości i współczynniki lepkości, ich znajomość umożliwia bowiem szczegółową analizę zachowań owoców i warzyw pod wpływem różnorodnych obciążeń i deformacji z wykorzystaniem metody elementów skończonych lub metody elementów brzegowych. Klasycznym, szczególnie w odniesieniu do warzyw i owoców, sposobem wyznaczania charakterystyk lepkosprężystych jest, złożony z dwu faz, test relaksacji naprężeń [6]. W pierwszej wstępnej fazie testu badana próbka poddawana jest odkształceniu ze stałą prędkością deformacji, w fazie drugiej, w której utrzymywane jest zadane odkształcenie, dokonuje się pomiaru malejącej w czasie siły.

Celem tej pracy było zbadanie wpływu prędkości deformacji na własności materiału zmodyfikowanego w pierwszej fazie testu relaksacji, a więc w wyniku wstępnej deformacji.

PODSTAWY MATEMATYCZNE

Powszechnie przyjętym sposobem opisu związku pomiędzy naprężeniem σ a odkształceniem ε w materiale lepkosprężystym, w zakresie niewielkich deformacji, jest model Maxwella [2,6]:

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

gdzie E jest modułem sprężystości, natomiast η oznacza współczynnik lepkości, lub równoważnie

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \sigma = \dot{\varepsilon} E \quad (2)$$

Aby przeanalizować wpływ prędkości deformacji $\dot{\varepsilon}$ na współczynnik sprężystości E zróżniczkujemy równanie (2) obustronnie względem E i $\dot{\varepsilon}$. Na podstawie (2) otrzymujemy

$$\frac{1}{\eta} \sigma dE = \dot{\varepsilon} dE + E d\dot{\varepsilon} \quad (3)$$

gdzie dE oznacza różniczkę współczynnika sprężystości E , natomiast $d\dot{\varepsilon}$ jest różniczką prędkości deformacji $\dot{\varepsilon}$. Na podstawie równania (3) mamy

$$\frac{dE}{d\dot{\varepsilon}} = \frac{E}{(\sigma/\eta - \dot{\varepsilon})}$$

a stąd, uwzględniając (1), otrzymujemy

$$\frac{dE}{d\dot{\epsilon}} = \frac{-\dot{\sigma}}{(\dot{\epsilon} - \sigma/\eta)^2} \quad (4)$$

W pierwszej fazie testu relaksacji naprężenie σ rośnie w czasie, wobec tego $\dot{\sigma} > 0$ i na podstawie równości (4) mamy $dE/d\dot{\epsilon} < 0$. Oznacza to, że moduł sprężystości E maleje wraz ze wzrostem prędkości deformacji $\dot{\epsilon}$. Równocześnie, ponieważ na podstawie równania (1) jeśli $\dot{\sigma} > 0$ to zachodzi nierówność $\dot{\epsilon} - \sigma/\eta > 0$, analizując wzór (4) łatwo stwierdzić, że wpływ prędkości deformacji $\dot{\epsilon}$ na moduł sprężystości E jest tym mniejszy im większą wartość przyjmuje ta prędkość.

Aby zbadać wpływ prędkości deformacji $\dot{\epsilon}$ na współczynnik lepkości η wykorzystamy następujące równanie wynikające wprost z równania (1)

$$\frac{\eta}{E} \dot{\sigma} + \sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (5)$$

Różniczkując równanie (5) obustronnie względem η i $\dot{\epsilon}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma} d\eta = \eta d\dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} d\eta \quad (6)$$

gdzie $d\eta$ oznacza różniczkę współczynnika lepkości η . Na podstawie równania (6) mamy

$$\frac{d\eta}{d\dot{\epsilon}} = \frac{\eta}{(\dot{\sigma}/E - \dot{\epsilon})}$$

Stąd po prostych przekształceniach, uwzględniając ponownie (1), otrzymujemy

$$\frac{d\eta}{d\dot{\epsilon}} = \frac{-\sigma}{(\dot{\epsilon} - \sigma/E)^2} \quad (7)$$

Ponieważ $\sigma > 0$, na podstawie równości (7) pochodna $d\eta/d\dot{\epsilon} < 0$. Wobec tego również współczynnik lepkości η maleje wraz ze wzrostem prędkości deformacji $\dot{\epsilon}$. Ponieważ na podstawie równania (1) tożsamościowo spełniona jest nierówność $\dot{\epsilon} - \sigma/E > 0$, ze wzoru (7) wynika także, iż wpływ prędkości deformacji na współczynnik lepkości η jest tym większy, im mniejszą wartość przyjmuje prędkość $\dot{\epsilon}$.

W drugiej fazie testu relaksacji utrzymywane jest stałe odkształcenie, wobec tego prędkość deformacji $\dot{\epsilon} = 0$ i równanie modelu Maxwella (1) przyjmuje postać

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = 0 \quad (8)$$

W tej fazie testu prędkość deformacji $\dot{\epsilon}$ nie wpływa więc ani na moduł sprężystości E ani na współczynnik lepkości η badanego materiału.

MATERIAŁ I METODY

Przedmiotem badań doświadczalnych były ziemniaki odmiany Irga oraz jabłka odmiany Rubin. Z każdej bulwy i owocu wycinano walcowe próbki o średnicy i wysokości 20 mm, które poddawano następnie testowi relaksacji naprężeń ściskając je wstępnie wzdłuż osi o wartość 1 mm w przypadku ziemniaka i 1,7 mm w przypadku jabłka. Eksperyment przeprowadzono zarówno w stanach jednoosiowego naprężenia jak i jednoosiowego odkształcenia. Próbki badane w stanie jednoosiowego naprężenia odkształcano między dwoma równoległymi płytkami. Próbki badane w stanie jednoosiowego odkształcenia umieszczano w cylindrze i odkształcano poprzez przesuwanie tłoka zapobiegając w ten sposób przemieszczeniom bocznym.

Testy relaksacji w quasi-statycznych warunkach obciążeń przeprowadzono na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej INSTRON 6022. Natomiast pomiary w warunkach obciążeń udarowych wykonano na stanowisku do badań dynamicznych [4]. Próbki poddawano deformacji wstępnej ze stałą prędkością. Po osiągnięciu założonej wartości odkształcenia rejestrowano malejącą w czasie siłę reakcji próbki podczas 120 sekund.

Na podstawie tak uzyskanych dyskretnych pomiarów siły reakcji próbki wyznaczono, stosując algorytm opisany szczegółowo w pracy [7], współczynniki sprężystości E_{ij} oraz lepkości η_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, w czteroparametrowych modelach Maxwella opisujących funkcję relaksacji w stanie jednoosiowego naprężenia $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = E_{11} \exp\left[-\left(\frac{E_{11}}{\eta_{11}}\right)t\right] + E_{12} \exp\left[-\left(\frac{E_{12}}{\eta_{12}}\right)t\right] \quad (9)$$

oraz funkcję relaksacji w stanie jednoosiowego odkształcenia $X(t)$:

$$X(t) = E_{21} \exp\left[-\left(\frac{E_{21}}{\eta_{21}}\right)t\right] + E_{22} \exp\left[-\left(\frac{E_{22}}{\eta_{22}}\right)t\right] \quad (10)$$

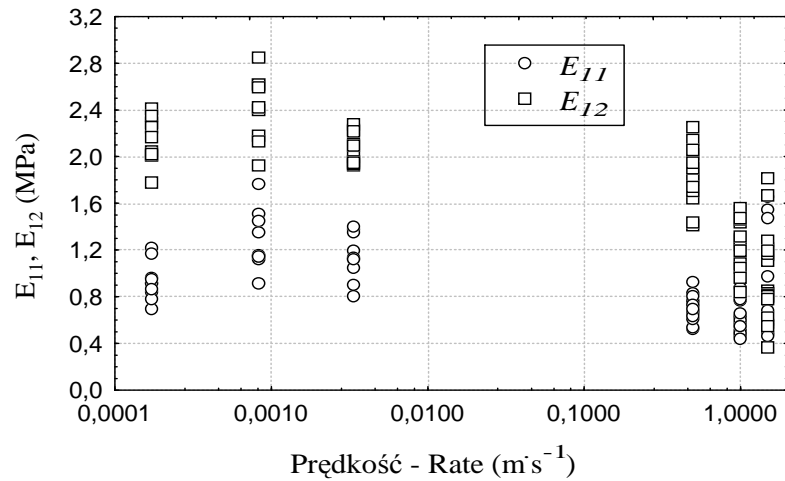
Należy podkreślić, iż algorytm przedstawiony w pracy [7], wykorzystuje podany przez Chena i Fridley'a [1] wzór opisujący przebieg siły reakcji walcowej próbki badanego materiału w przypadku, gdy proces relaksacji naprężeń opisywany jest czteroparametrowym modelem Maxwella. Wzór ten uwzględnia w sposób jawny prędkość deformacji zastosowaną we wstępnej fazie testu relaksacji. W konsekwencji pozwala to na uwzględnienie prędkości deformacji w algorytmie wyznaczania najlepszego modelu postaci (9) i (10).

WYNIKI I DYSKUSJA

Badania eksperymentalne przeprowadzono dla sześciu różnych prędkości wstępnej deformacji: $0,16 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, $0,83 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, $3,33 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ oraz $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Trzy pierwsze wartości odpowiadają quasi-statycznym warunkom obciążeń, a trzy następne obciążeniom udarowym. Uzyskane eksperymentalnie zależności modułów sprężystości E_{ij} oraz współczynników lepkości η_{ij} od prędkości deformacji materiału dla próbek jabłek odmiany Rubin badanych w stanach jednoosiowego naprężenia i jednoosiowego odkształcenia przedstawiono na rysunkach 1-4. Odpowiednie zależności uzyskane dla ziemniaków odmiany Irga przedstawiają rysunki 5-8. Aby zwiększyć czytelność wykresów, ze względu na duży zakres badanych prędkości, na osi odciętych zastosowano podziałkę logarymiczną.

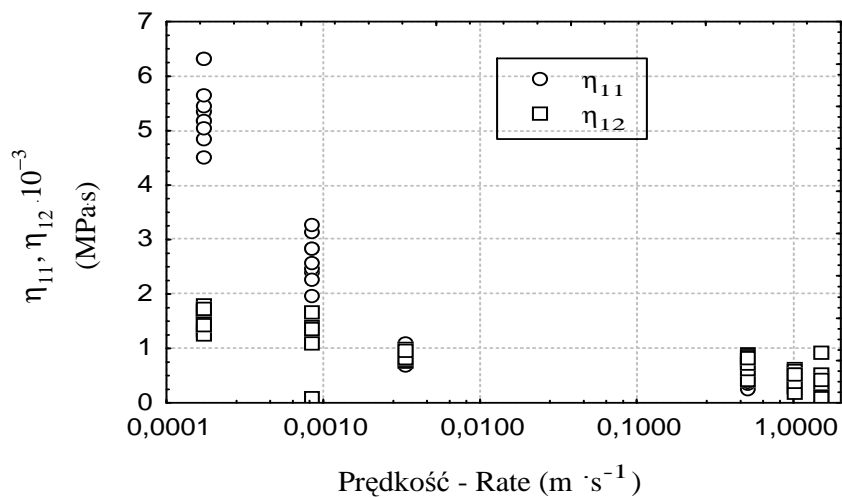
Uzyskane doświadczalnie zależności wartości modułów sprężystości E_{ij} oraz współczynników lepkości η_{ij} potwierdzają wyniki analizy teoretycznej. Wartości parametrów E_{ij} oraz η_{ij} maleją wraz ze wzrostem prędkości deformacji. Dla próbek badanych w stanie jednoosiowego odkształcenia zależność modułów sprężystości od prędkości deformacji jest silniejsza niż dla próbek poddawanych jednoosiowemu naprężeniu. Jest tak zarówno dla próbek jabłka (rys. 1 i 3) jak i ziemniaka (rys. 5 i 7). Podobną prawidłowość można zaobserwować analizując wpływ prędkości deformacji na współczynniki lepkości.

Równocześnie dla prędkości w zakresie: $0,16\text{-}3,33 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, czyli w zakresie obciążeń quasi-statycznych, wpływ prędkości deformacji na oba parametry jest silniejszy niż dla prędkości z zakresu: $0,5\text{-}1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, właściwego dla obciążeń o charakterze udarowym. Przy dużych prędkościach deformacji struktura komórkowa materiałów roślinnych ulega znacznej degradacji, o czym świadczą stosunkowo małe wartości zarówno modułów sprężystości E_{ij} jak i współczynników lepkości η_{ij} . Wpływ konkretnej prędkości deformacji jest wówczas znacznie mniejszy niż dla niższych wartości prędkości. Prawidłowości te dotyczą zarówno próbek ściskanych swobodnie jak i próbek ściskanych w cylindrach.



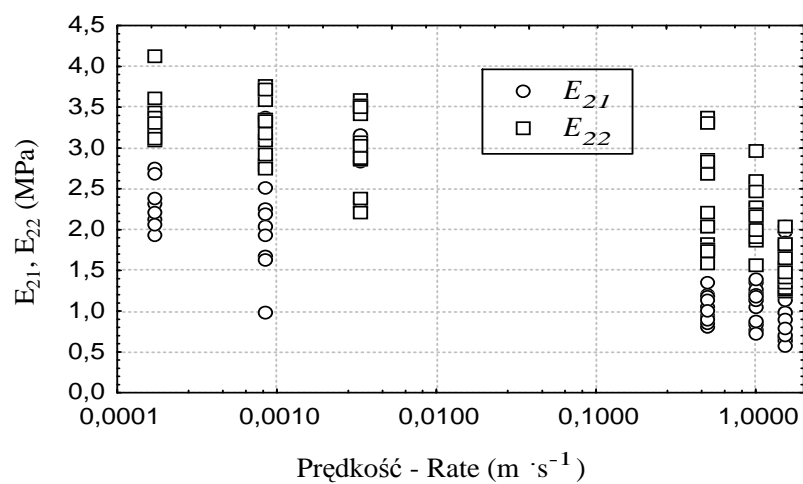
Rys. 1. Zależność modułów sprężystości E_{11} i E_{12} od prędkości deformacji dla próbek jabłka w stanie jednoosiowego naprężenia

Fig. 1. Modulus of elasticity E_{11} and E_{12} versus deformation rate of the apple samples in the state of uniaxial stress



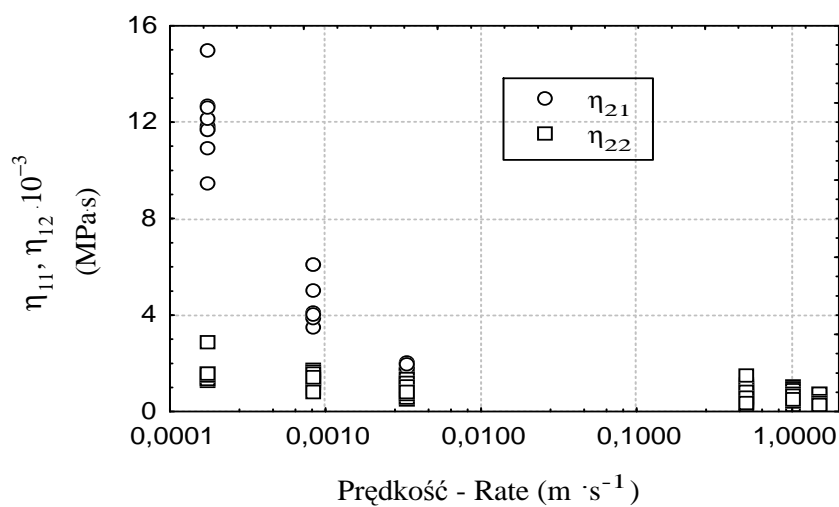
Rys. 2. Zależność współczynników lepkości η_{11} i η_{12} od prędkości deformacji dla próbek jabłka w stanie jednoosiowego naprężenia

Fig. 2. Viscosity ratio η_{11} and η_{12} versus deformation rate of the apple samples in the state of uniaxial stress



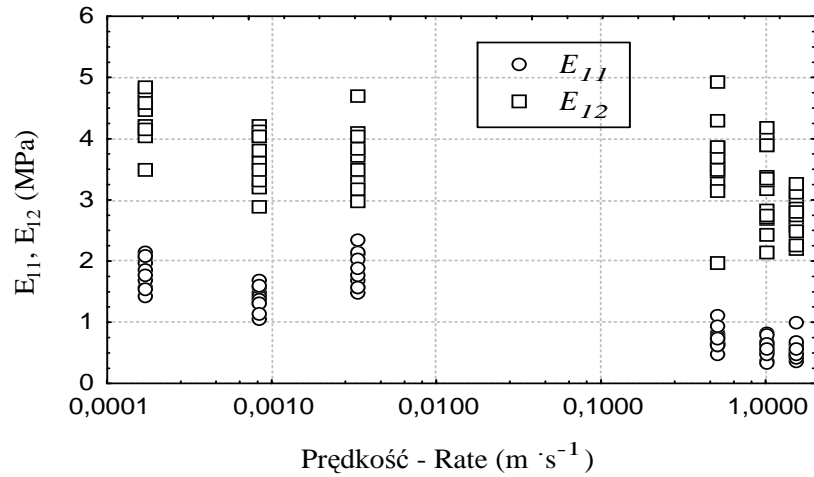
Rys. 3. Zależność modułów sprężystości E_{21} i E_{22} od prędkości deformacji dla próbek jabłka w stanie jednoosiowego odkształcenia

Fig. 3. Modulus of elasticity E_{21} and E_{22} versus deformation rate of the apple samples in the state of uniaxial strain



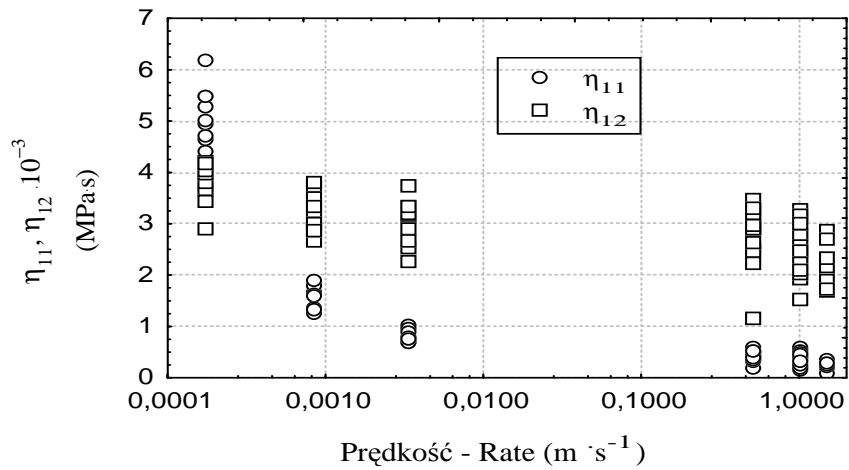
Rys. 4. Zależność współczynników lepkości η_{21} i η_{22} od prędkości deformacji dla próbek jabłka w stanie jednoosiowego odkształcenia

Fig. 4. Viscosity ratio η_{21} and η_{22} versus deformation rate of the apple samples in the state of uniaxial strain



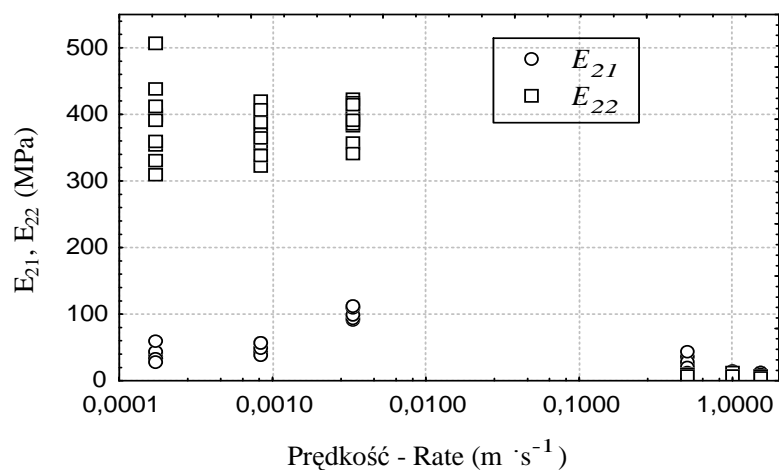
Rys. 5. Zależność modułów sprężystości E_{11} i E_{12} od prędkości deformacji dla próbek ziemniaka w stanie jednoosiowego naprężenia

Fig. 5. Modulus of elasticity E_{11} and E_{12} versus deformation rate of the potato samples in the state of uniaxial stress



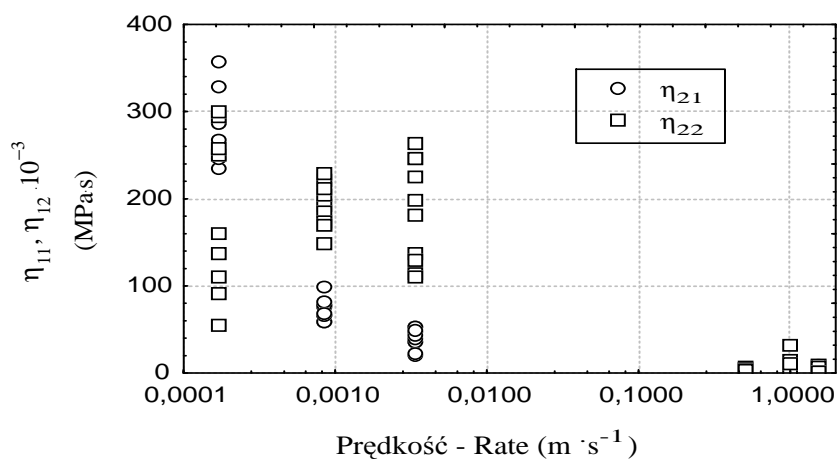
Rys. 6. Zależność współczynników lepkości η_{11} i η_{12} od prędkości deformacji dla próbek ziemniaka w stanie jednoosiowego naprężenia

Fig. 6. Viscosity ratio η_{11} and η_{12} versus deformation rate of the potato samples in the state of uniaxial stress



Rys. 7. Zależność modułów sprężystości E_{21} i E_{22} od prędkości deformacji dla próbek ziemniaka w stanie jednoosiowego odkształcenia

Fig. 7. Modulus of elasticity E_{21} and E_{22} versus deformation rate of the potato samples in the state of uniaxial strain



Rys. 8. Zależność współczynników lepkości η_{21} i η_{22} od prędkości deformacji dla próbek ziemniaka w stanie jednoosiowego odkształcenia

Fig. 8. Viscosity ratio η_{21} and η_{22} versus deformation rate of the potato samples in the state of uniaxial strain

Wykazane zależności wynikają z nieodwracalnego charakteru procesów zachodzących w tkankach materiałów roślinnych związanych z pęknięciami ścian komórkowych, rozwarstwieniem struktury oraz zjawiskami filtracji i przepompowywania soku komórkowego i potwierdzają hipotezę o rosnącej wraz z prędkością deformacji liczbie mikrouszkodzeń tkanki materiału roślinnego. Wyniki badań mogą być więc wykorzystane do oceny stopnia degradacji wewnętrznej struktury tkanek. Należy oczekiwać, iż dokładniejszą analizę wpływu prędkości deformacji na lepkosprężyste charakterystyki materiałów roślinnych można przeprowadzić na gruncie teorii modeli quasi-liniowych [3].

WNIOSKI

1. Wykazano wpływ prędkości deformacji na moduły sprężystości i współczynniki lepkości dynamicznej materiałów o własnościach lepkosprężystych opisanych modelem Maxwella.
2. Badania eksperymentalne, przeprowadzone dla próbek jabłek oraz ziemniaków poddawanych testowi relaksacji naprężeń w szerokim zakresie prędkości deformacji wstępnej, ściśniętych swobodnie i w cylindrach, potwierdziły, że moduły sprężystości i współczynniki lepkości maleją wraz ze wzrostem prędkości deformacji.

PIŚMIENNICTWO

1. **Chen P., Fridley R. B.:** Analytical method for Determining Viscoelastic Constants of Agricultural Materials. Transactions of the ASAE, 15, 1103-1106, 1972.
2. **Christensen R. M.:** Theory of Viscoelasticity. An Introduction. Academic Press, New York, 1971.
3. **Fung, Y.C.:** Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. Springer, New York, 1981.
4. **Gołacki K., Stropek Z., Graboś A.:** Test relaksacji naprężeń w materiale biologicznym w warunkach obciążenia dynamicznego realizacja techniczna. Inżynieria Rolnicza, 2/99, 55-61, 1999.
5. **Gołacki K.A., Stropek Z.:** Adekwatność opisu reakcji materiału roślinnego na obciążenia mechaniczne na gruncie liniowej teorii lepkosprężystości. Acta Agrophysica, 106, 3(3), 453-463, 2004.
6. **Rao M.A.:** Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications. Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland, 1999.
7. **Stankiewicz A., Gołacki K.:** Algorytm identyfikacji zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego roślinnych materiałów lepkosprężystych. Acta Sci. Pol., Technica Agraria, 3(1-2), 79-95, 2004.

EFFECT OF DEFORMATION RATE ON SELECTED CHARACTERISTICS
OF VISCOELASTIC PLANT MATERIALS

Krzysztof Gołacki, Anna Stankiewicz, Zbigniew Stropek

Department of Machine Theory and Automatics, University of Agriculture
ul. Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin
e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl

Abstract. The paper reports the results of a study on the influence of the deformation rate on the mechanical parameters of biological viscoelastic materials. It is proved, based on the Maxwell model, that the modulus of elasticity and the viscosity ratio are decreasing functions of the rate of deformation. Next the modulus of elasticity and the viscosity ratio of the apple and potato cylindrical samples are determined using discrete-time measurements of the reaction force obtained in compression and relaxation tests for six different values of the deformation rate. The stress relaxation both in the state of uniaxial stress as well as in the state of uniaxial strain is considered. The experimental results are in good agreement with theoretical analysis for both the biological materials considered.

Keywords: potato, apple, viscoelasticity, stress relaxation, Maxwell model, deformation rate