

## PRÓBA DOBORU MODELU REOLOGICZNEGO TKANKI WARZYW RZEPOWATYCH NA PODSTAWIE TESTU RELAKSACJI NAPRĘŻEŃ

*Jerzy Bohdziewicz*

Inżynierii Rolniczej, Akademia Rolnicza, ul. Chelmońskiego 37/41, 51-630 Wrocław  
e-mail: bohdziewicz@imr.ar.wroc.pl

**Streszczenie.** Badano relaksację naprężeń w tkankach mięszu zgrubień jadalnych rzodkwi i rzodkiewki. Zmiany wartości naprężenia w próbkach badanego materiału, opisano równaniem charakterystycznym dla kilkuelementowego modelu Maxwella, standardowego i Burgersa. Przedstawiono wyniki obliczeń wartości chwilowych modułów sprężystości  $E_i$  oraz współczynników lepkości dynamicznej  $\eta_i$  i lepkości pozornej  $\eta_a$ , traktowanych jako parametry przyjętych modeli. Stwierdzono, że zmiana wzajemnych relacji tych parametrów jest konsekwencją matematycznych właściwości funkcji aproksymujących przebiegi naprężenia w funkcji czasu  $\sigma(t)$  oraz czasu trwania testu. Tkanka rzodkiewki ma mniejsze możliwości kumulacji energii sprężystej. Występuje także bardziej intensywny przebieg dyssypacji nagromadzonej energii, o czym świadczą mniejsze wartości umownego oporu tarcia wewnętrznego i oporu relaksacji naprężeń, w porównaniu z tkanką rzodkwi.

**Słowa kluczowe:** relaksacja, model reologiczny, warzywa rzepowate

### WSTĘP

Zbudowanie modelu matematycznego jest próbą idealizacji rzeczywistego obiektu badań, wymaga wstępnego zgromadzenia informacji, na podstawie których powstaje model materialny. Izomorfizm obu modeli przejawia się adekwatnością zjawisk i procesów, w rezultacie możliwe staje się imitowanie zjawisk w obiekcie rzeczywistym. Utworzenie modelu matematycznego materiału biologicznego, w tym przypadku tkanki mięszu warzyw rzepowatych, wymaga wprowadzenia szeregu uproszczeń, polegających na wyizolowaniu z otaczającego środowiska oraz na wyznaczeniu reakcji obiektu na obciążenie podczas testów. Oddziaływanie środowiska oraz nieprawidłowości w realizacji pomiarów, są traktowane jako zaburzenia o działaniu selektywnym.

Model taki pozwala na obrazową interpretację zmiennych fizycznych stanu obiektu badań, bez wnikania w jego strukturę rzeczywistą. Jako model matema-

tyczny stanowiąc będzie zbiór wzajemnych relacji parametrów stanu, które są na ogół funkcjami czasu. Należy także podkreślić, że ta idealizacja wymaga pominięcia masy, co powoduje uproszczenie do bezinercyjnych elementów sprężystych oraz wiskotycznych. Model tkanki warzyw, utworzony na podstawie testu relaksacji naprężeń, może być kombinacją szeregowo-równoległych połączeń pomiędzy takimi elementami.

Gołacki i Stropek, w retrospektywnym przeglądzie [7] zauważyli sprzeczność, pomiędzy zwiększaniem liczby elementów i powiązań między nimi, niezbędnymi do dokładniejszego odwzorowania przebiegów doświadczalnych, a prostotą wynikającą z przydatności do opisu obiektu badań. Należy też uwzględnić specyficzne właściwości przyjętych funkcji matematycznych (np. nieciągłość, wartości ujemne), niemające odwzorowania w warunkach rzeczywistych [4,15].

Ogólnie rzecz biorąc, dotychczasowe opracowania modeli reologicznych tkanek korzeni warzyw dotyczyły marchwi i buraka. Do opisanie właściwości reologicznych marchwi wykorzystano cztero- i sześcioparametrowe modele Maxwella [2,6,13,16], modele Zenera i Burgersa w odniesieniu do buraka cukrowego [5]. Według koncepcji Pelega [12] podczas relaksacji występuje transpozycja elementów modelu Burgersa do postaci wieloparametrowego modelu Maxwella. Inną koncepcję rozpatrywania badanych przebiegów  $\sigma(t)$  przyjęli Kiesewetter i Hellebrand [9] oraz Blahovec [1], wprowadzając funkcje logarytmiczne, Konstankiewicz i Pukos uwzględnili inne zależności [10].

W niniejszej pracy przedstawiono trzy warianty koncepcji modelu reologicznego tkanki mięszu warzyw rzepowatych (*Raphanus sativus*), utworzonych na podstawie wyników testu relaksacji naprężeń. Wykorzystano metodykę, stosowaną przez autora do badań warzyw korzeniowych [3].

## MATERIAŁ I METODY

Badano zgrubienia jadalne rzodkiewki odmiany Sopol Lodu i rzodkwi Murzynka. Pobrano próbki walcowe o średnicy 17,6 mm i wysokości  $20 \pm 2$  mm (mierzonej dla każdej próbki). Wyznaczano także gęstość badanego materiału oraz zawartość suchej substancji.

Testy realizowano na maszynie wytrzymałościowej typu Instron 5566 z głowicą o zakresie do 1 kN, prędkość przemieszczenia  $1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ .

Próbki poddano wstępnemu obciążeniu na poziomie 50% wartości siły  $F_{\max}$ , uprzednio wyznaczonej podczas testu ściskania innych próbek, pobranych z tego samego materiału.

Do opisu zachowania się materiału w zadanych warunkach przyjęto modele reologiczne, których parametrami są sprężystość  $E$ , lepkość  $\eta$  oraz lepkość pozorna  $\eta_a$ .

Przebieg zmian wartości naprężenia w funkcji czasu opisano równaniem charakterystycznym dla uogólnionego modelu Maxwella,

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot e^{b_i \cdot t} \quad (1)$$

dla modelu standardowego (Zenera),

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot e^{b_i \cdot t} \cdot c_i \quad (2)$$

oraz dla uogólnionego modelu Burgersa

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot e^{b_i \cdot t} + c \cdot t + d \quad (3)$$

gdzie:  $\sigma(t)$  – naprężenie,  $t$  – czas,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d$  – współczynniki równania.

Do obliczenia współczynników równania stosowano metodę najmniejszych kwadratów. Wykorzystano zapis prawa Hooke'a i uogólnionego prawa lepkości Newtona, do obliczeń wartości chwilowych modułów sprężystości  $E_i$  oraz współczynników: lepkości dynamicznej  $\eta_i$  oraz lepkości pozornej  $\eta_a$ , traktowanych jako parametry przyjętego modelu. W modelu Burgersa lepkość pozorną  $\eta_a$  obliczono przez porównanie hipotetycznego oporu relaksacji naprężeń (przeciwstawiającego się przemianie energii potencjalnej w ciepłą), z oporem tarcia wewnętrznego ciała idealnie wiskotycznego (przeciwstawiającemu się zamianie energii kinetycznej w ciepłą). Gradient spadku naprężenia (odzwierciedlenie zmian energii potencjalnej) zastąpiono zależnością  $d\sigma \cdot dt^{-1} = E \cdot d\varepsilon \cdot dt^{-1}$ , powstałą w wyniku różniczkowania względem czasu równania reologicznego ciała Hooke'a. Zależność tę uwzględniono w równaniu stanu dla cieczy Newtona [11,17]. Takie odniesienie ma znaczenie czysto teoretyczne i brak jest jednoznacznej interpretacji fizycznej. Do analizy zmian wartości parametrów wykorzystano zestawienie sekwencyjne odpowiednio po upływie 180 oraz 1800 sekund, zastosowano także ekstrapolację przyjętych funkcji do prognozowania zmian wartości naprężenia  $\sigma(t)$  w dłuższym przedziale czasowym.

## WYNIKI I DYSKUSJA

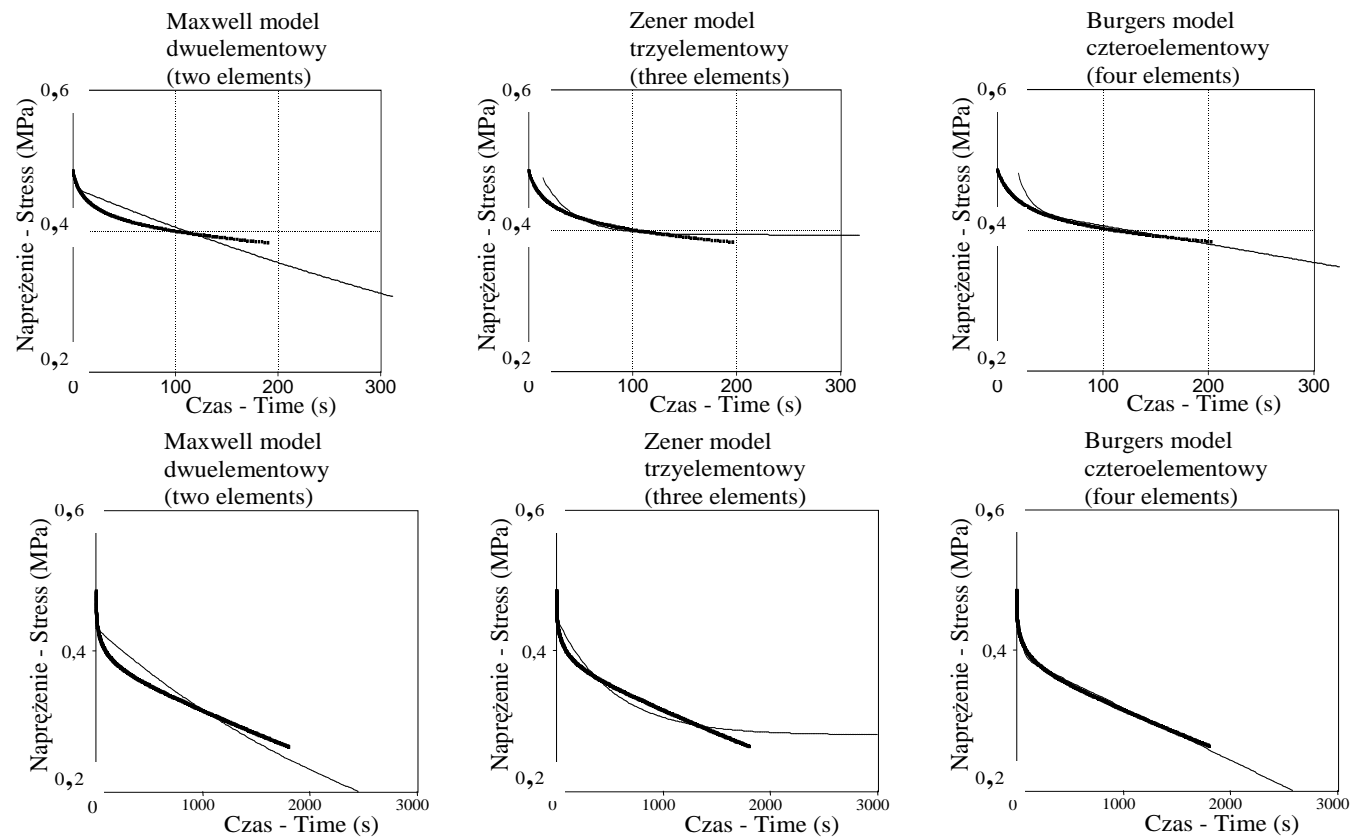
Do analizy przebiegu zmian  $\sigma(t)$  wybrano jeden z przebiegów z rodziny krzywych, powstałej na podstawie kolejnych powtórzeń pomiarów. Aby porównać właściwości próbek obu badanych materiałów dokonano selekcji pod względem gęstości i zawartości suchej substancji. Zastosowanie metody najmniejszych

kwadratów pozwoliło stwierdzić, że najbardziej przydatną jest regresja z wykorzystaniem funkcji wykładniczej. Umożliwia to opisanie zmian poziomu potencjalnej energii sprężystości przez analogię do modeli reologicznych, opracowanych w oparciu o teorię sprężystości [13,14,17].

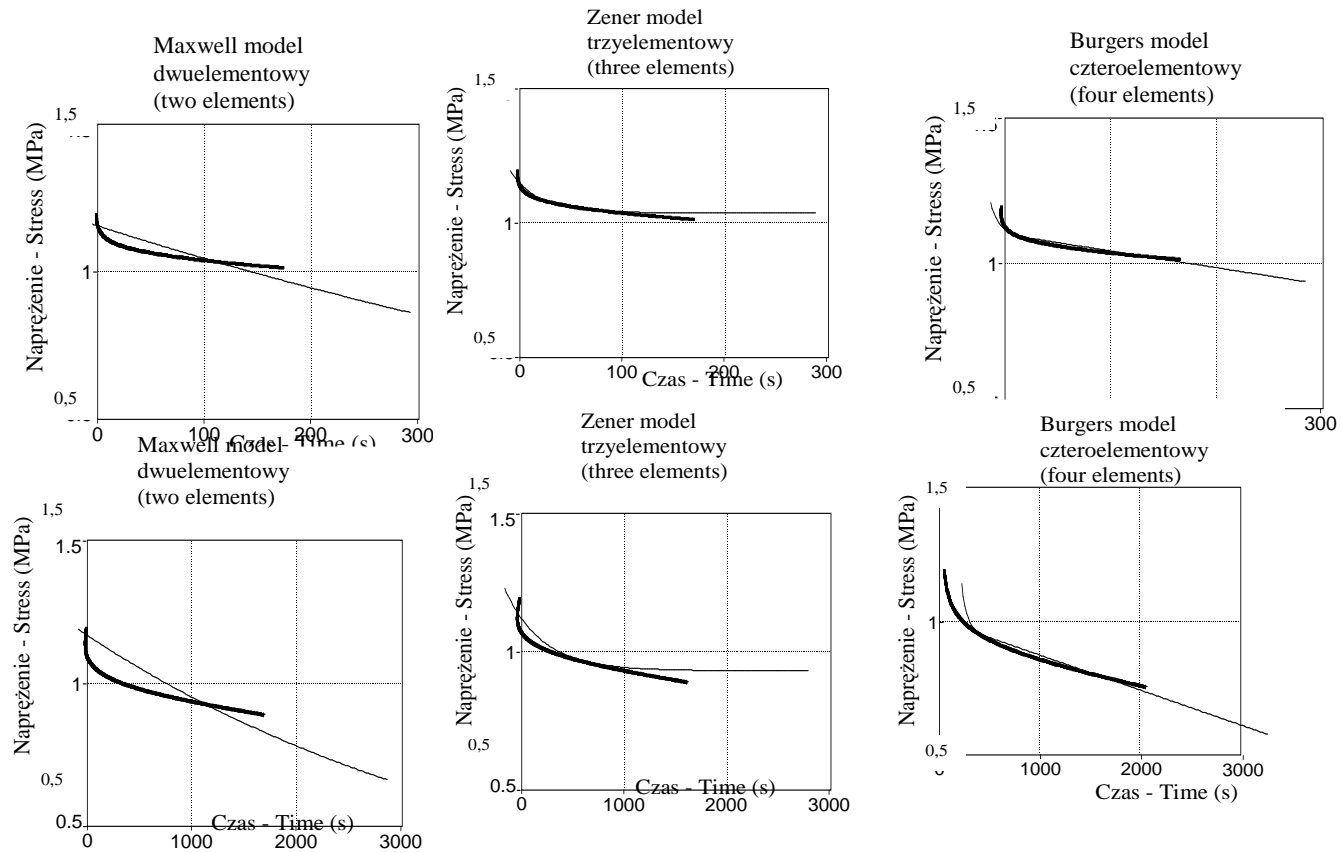
Aproksymację wybraną funkcją przebiegu  $\sigma(t)$ , pokazano na rysunkach 1 i 2. Zestawienie parametrów charakteryzujących elementy przyjętych modeli, zamieszczono w tabeli 1.

**Tabela 1.** Zestawienie wyników obliczeń parametrów modeli reologicznych  
**Table 1.** The calculations of rheological model parameters

Materiał Material	Czas Time (s)	Wskaźnik Coefficient $R^2$	Moduł Modulus $E_1$ (MPa)	Moduł Modulus $E_2$ (MPa)	Moduł Modulus $E_3$ (MPa)	Lepkość Viscosity $\eta_1$ (GPa)	Lepkość Viscosity $\eta_2$ (MPa)
Rzodkiewka Small radish	Model Maxwella dwuelementowy, two-element Maxwell model						
	180	0,804	3,9			2,9	
	1800	0,899	3,7			11,8	
	Model Maxwella czteroelementowy, four-element Maxwell model						
	180	0,995	3,7	0,4		5,4	4,6
	1800	0,997	3,4	0,6		14,5	19,1
	Model Zenera trzelementowy, three-element Zener model						
	180	0,973	0,7	3,4		0,02	
	1800	0,949	2,4	1,4		0,75	
	Model Zenera pięcioelementowy, five-element Zener model						
	180	0,999	0,6	0,3	3,2	0,04	1,5
	1800	0,997	1,8	0,6	1,6	3,2	13,2
	Model Burgersa czteroelementowy, four-element Burgers model						
	180	0,995	3,6	0,5		4,9	5,9
1800	0,995	3,4	0,7		17,5	25,1	
Rzodkiew Radish	Model Maxwella dwuelementowy, two-element Maxwell model						
	180	0,780	5,5			3,4	
	1800	0,757	5,2			18,2	
	Model Maxwella czteroelementowy, four-element Maxwell model						
	180	0,996	5,0	0,8		7,1	8,3
	1800	0,989	4,6	1,1		26,5	31,8
	Model Zenera trzelementowy, three-element Zener model						
	180	0,977	1,1	4,6		0,03	
	1800	0,945	1,7	3,8		0,33	
	Model Zenera pięcioelementowy, five-element Zener model						
	180	0,999	0,9	0,5	4,5	0,05	2,6
	1800	0,997	1,5	0,9	3,3	1,5	18,9
	Model Burgersa czteroelementowy, four-element Burgers model						
	180	0,995	5,0	0,8		7,6	8,7
1800	0,987	4,6	1,1		30,7	36,1	



**Rys. 1.** Aproksymacja i ekstrapolacja przebiegu  $\sigma(t)$  w czasie 180 i 1800 sekund. Tkanka mięszu rzodkiewki  
**Fig. 1.** Approximation and extrapolation of function  $\sigma(t)$  for 180 and 1800 seconds test time. Small radish flesh tissue



**Rys. 2.** Aproksymacja i ekstrapolacja przebiegu  $\sigma(t)$  w czasie 180 i 1800 sekund. Tkanka mięsna rzodkwi  
**Fig. 2.** Approximation and extrapolation of function  $\sigma(t)$  for 180 and 1800 seconds test time. Radish flesh tissue

W przebiegu zmian  $\sigma(t)$  w tkance rzodkiewki (rys. 1), można wyróżnić trzy charakterystyczne etapy. W czasie krótszym niż 600 sekund, traktowanym jako stan przejściowy, występuje stosunkowo szybki spadek wartości naprężenia, co wynika z różnicy nakładów energii kinetycznej (niezbędnej do osiągnięcia wstępnego naprężenia), a wielkością nagromadzonej potencjalnej energii sprężystej.

Drugi etap to w miarę równomierne zanikanie zakumulowanej energii, wyróżnia go duża umowna lepkość. Intensywność zmian przebiegu  $\sigma(t)$  wpływa na zmiany parametrów funkcji aproksymującej, zauważalna jest także zmiana w zapisie funkcji charakterystycznej dla etapu początkowego. W tabeli 1 można zauważyć jednocześnie i wzrost, i spadek wartości modułów sprężystości w miarę upływu czasu relaksacji, co z uwagi na właściwości fizyczne badanego materiału nie jest realne w warunkach rzeczywistych, a jest jedynie konsekwencją przyjętych warunków aproksymacji i świadczy o zmianie proporcji pomiędzy składowymi danej funkcji. W zapisie modelu Zenera, intensywność zmian lepkości nie jest opisana, zastępuje ją współrzędna punktu końcowego przebiegu  $\sigma(t)$ , obliczona na podstawie ekstrapolacji przyjętej funkcji dla wybranego przedziału czasowego, stąd jej chwilowa wartość może być dodatnia, ujemna lub równa zero.

Trzeci etap w przebiegu  $\sigma(t)$ , ze względu na jego długotrwałość, nie został uwidoczniowany na rysunku 1. Charakteryzuje go stopniowe zbliżanie się do końcowej wartości naprężenia w badanym materiale. Jeżeli byłaby ona równa zeru, to jedyną funkcją aproksymującą przebieg relaksacji byłby zapis dotyczący modelu Maxwella. Jednocześnie w modelu Zenera jeden z parametrów miałby wartość zerową, w modelu Burgersa lepkość pozorna  $\eta_a$  osiągnęłaby nieskończoność, a więc w obu przypadkach nastąpiłaby redukcja do modelu Maxwella.

Każda inna wartość końcowa w obserwowanym przebiegu  $\sigma(t)$ , powoduje transformację cztero- i więcej parametrowego modelu Maxwella do postaci Zenera, gdyż nie będzie spełniony warunek asymptotycznej dążności do osiągnięcia wartości zerowej. W modelu Zenera jeden z parametrów może być dodatni lub zerowy. Można także wykorzystać model Burgersa, którego zapis upodobni się do modelu Zenera, z uwagi na to, że lepkość pozorna  $\eta_a$  osiągnie nieskończoność.

Jak można zauważyć analiza przebiegu relaksacji naprężeń w czasie krótszym niż 600 sekund daje obraz stanu przejściowego o charakterze nieustalonym. Zdolność kumulacji energii sprężystej oraz jej dyssypację należy obserwować w dłuższym przedziale czasowym, jednakże nieprzekraczającym kilku tysięcy sekund, gdyż mogą pojawić się czynniki zakłócające w postaci przemian biologicznych oraz innych procesów, np. termofizycznych. Należy także podkreślić, że przyjęta jako parametr lepkości pozorna  $\eta_a$  nie ma fizycznego odpowiednika i jest jedynie umownym przelicznikiem przyjętym przez analogię do cieczy Newtona.

Przebieg zmian  $\sigma(t)$  w tkance rzodkwi (rys. 2) wyróżniają tylko dwa etapy. W czasie zbliżonym do 1000 sekund, występuje szybki spadek wartości naprę-

zenia. Drugim etapem jest stopniowe przejście do stanu ustalonej wartości naprężenia. Etap ten charakteryzuje wyraźna rozbieżność ekstrapolacji funkcji aproksymujących w stosunku do rzeczywistego przebiegu relaksacji, dotyczy to zwłaszcza modelu Maxwella i Burgersa. Przydatnym jest więc model Zenera, biorąc jednak pod uwagę możliwość porównania wyników obliczeń parametrów modeli utworzonych dla tkanek obu badanych warzyw, przyjęto model Burgersa.

Z porównania wartości lepkości w początkowym etapie relaksacji (tab. 1) można zauważyć, że w tkance rzodkiewki występuje intensywniejszy spadek wartości naprężenia, w porównaniu z rzodkwią. Zmiany lepkości  $\eta$  oraz lepkości pozornej  $\eta_a$  obrazują przebieg dyssypacji energii sprężystej, nagromadzonej w szkieletcie komórkowym. Można zauważyć proporcjonalny wzrost obu lepkości w miarę upływu czasu, zarówno w tkance rzodkiewki, jak i rzodkwi.

#### WNIOSKI

1. Różnice, pomiędzy wartościami parametrów przyjętych modeli reologicznych, są konsekwencją matematycznych właściwości funkcji aproksymujących rzeczywiste przebiegi  $\sigma(t)$ , podczas relaksacji naprężeń. Z uwagi na to, że konstrukcja modeli wieloelementowych jest skutkiem powstawania funkcji aproksymującej ze złożenia składowych, opisujących przebieg dyssypacji nagromadzonej energii sprężystej, czas trwania testu powinien być dłuższy niż kilkaset sekund.

2. Do porównania parametrów reologicznych tkanek mięszu rzodkwi i rzodkiewki można zastosować model Burgersa. Intensywny spadek wartości lepkości na początku zjawiska relaksacji naprężeń wskazuje, że podczas wstępnego ściskania tkanki rzodkiewki znaczna część nakładów energetycznych jest bezpowrotnie tracona. Występują także mniejsze opory sprężyste, w porównaniu z tkanką rzodkwi, co prawdopodobnie jest skutkiem zróżnicowania morfologicznego oraz zawartości wody.

3. Przyjęcie modelu Burgersa bynajmniej nie dyskredytuje pozostałych modeli. W każdym przypadku mamy do czynienia z opisaniem intensywności zmian naprężenia w zadanych warunkach testu, natomiast obliczone wartości parametrów są konsekwencją przyjęcia hipotetycznych zależności, określanych jako prawo Hooke'a lub Newtona, oraz zastosowania wybranej metody aproksymacji przebiegów rzeczywistych. Z tego względu bezpośrednio odniesienie do rzeczywistej struktury tkanki roślinnej należy także traktować jako hipotetyczne.



## PIŚMIENNICTWO

1. **Blahovec J.:** Stress relaxation phenomena in vegetable tissue. Experimental results. J.of Material Sci., 31, 1729-1734, 1996.
2. **Bohdziewicz J.:** Właściwości reologiczne związane z morfologią korzenia marchwi. Inżynieria Rolnicza, 12(32), 51-58, 2001.
3. **Bohdziewicz J.:** Zmienność parametrów charakteryzujących zjawisko relaksacji naprężeń w tkance buraka ćwikłowego. Acta Agrophysica, 83, 33-44, 2003.
4. **Bronsztejn L.N., Siemiendiajew K.A.:** Matematyka. Poradnik encyklopedyczny. PWN Warszawa, 1988.
5. **Bzowska-Bakalarz M.:** Comparison of rheological models determining the physical properties of sugar beet roots. Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference Physical Properties of Agricultural Materials, Rostock, 109-112, 1989.
6. **Gołacki K., Stropek Z.:** Adekwatność opisu reakcji materiału roślinnego na obciążenia mechaniczne na gruncie liniowej teorii lepkości. Acta Agrophysica, 3(3), 453-463, 2004.
7. **Gołacki K., Stropek Z.:** Przegląd modeli reologicznych materiałów roślinnych o dużej zawartości wody. Inżynieria Rolnicza, 2, 63-68, 2001.
8. **Jeong H.S., Kim K.J., Park N.K., Song J.C., Lee S.Y.:** Stress relaxation characteristics of some vegetables. J. of Horticulture Sci., 39(2), 122-126, 1997.
9. **Kiesewetter R., Hellebrand J.:** Untersuchungen mechanischer Eigenschaften an Radieschen (*Raphanus sativus*) und Grunspargel (*Asparagus officinalis*). Tagungsbericht Akademie der Landwirtschaftswissenschaften DDR, 208, 187-192, 1982.
10. **Konstankiewicz K., Pukos A.:** Metodyczne aspekty w badaniach nad nową mechaniką materiałów rolniczych. Inżynieria Rolnicza, 2(3), 5-20, 1998.
11. **Osiński Z.:** Tłumienie drgań mechanicznych. PWN Warszawa, 1986.
12. **Peleg. M.:** Characterization of the stress relaxation curves of solid foods. J. of Food Sci., 44(1), 277-281, 1979.
13. **Rao M.A., Rizvi S.S.H.:** Engineering properties of foods. Marcel Dekter Inc. New York, 1995.
14. **Smith J.M.:** Mathematical ideas in biology. Cambridge University Press, 1968.
15. **Strzałkowski A., Śliżyński A.:** Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów. PWN Warszawa, 1973.
16. **Szot B., Gołacki K.:** The relationship between the elasticity and viscosity and the parameters determining the status of water of carrot roots. Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference Physical Properties of Agricultural Materials, Rostock, 819-823, 1989.
17. **Walczak J.:** Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. PWN, Warszawa, 1967.

RHEOLOGICAL MODEL FITTING FOR RADISH AND SMALL RADISH  
FLESH TISSUE ON THE BASIS OF STRESS RELAXATION TEST

*Jerzy Bohdziewicz*

Institute of Agricultural Engineering, University of Agriculture  
ul. Chełmońskiego 37/41, 51-630 Wrocław  
e-mail: bohdziewicz@imr.ar.wroc.pl

**Abstract.** Stress relaxation in radish and small radish flesh tissue was studied. Changes of the stress decay in specimens were described by equations characteristics for multi-element Maxwell, Zener and Burgers models. The paper presents calculations of momentary elastic modulus  $E_i$  and dynamic viscosity factors  $\eta_i$ ,  $\eta_a$  as parameters of accepted models. It was found that changes of parameter value relations were a consequence of approximation functions properties and test time. The small radish tissue had lower potential of elastic energy accumulation than the radish tissue. Dissipation of energy was more intensive and internal mechanical resistance was less, too.

**Key words:** relaxation, rheological models, radish and small radish