

ALGORYTM APROKSYMACJI SPEKTRUM RETARDACJI ROŚLINNYCH MATERIAŁÓW LEPKOSPREŻYSTYCH FUNKCJAMI LEGENDRE'A

Anna Stankiewicz

Katedra Podstaw Techniki, Akademia Rolnicza
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: anna.stankiewicz@ar.lublin.pl

Streszczenie. W pracy rozważa się problem wyznaczania spektrum retardacji liniowych materiałów lepkospreżystych na podstawie dyskretnych zakłóconych pomiarów czasowych przebiegów funkcji pełzania (retardacji), zgromadzonych w standardowym teście pełzania. Zaproponowano metodę aproksymacji ciągłego spektrum częstotliwości retardacji skończoną sumą ortonormalnych funkcji Legendre'a. Problem wyznaczania spektrum retardacji jest źle uwarunkowanym problemem odwrotnym. Do stabilizacji jego rozwiązania zastosowano technikę regularyzacji Tichonowa ze współczynnikiem regularyzacji dobranym uogólnioną metodą sprawdzania krzyżowego (*GCV*). Pokazano, że dokładność aproksymacji spektrum retardacji zależy zarówno od zakłóceń w pomiarach funkcji pełzania oraz wartości współczynnika regularyzacji, jak i odpowiedniego doboru parametrów i liczby funkcji bazowych. Załączono wyniki eksperymentu numerycznego.

Słowa kluczowe: lepkospreżystość, spektrum retardacji, algorytm identyfikacji, regularyzacja, funkcje Legendre'a

WSTĘP

Spektrum retardacji, lub równoważnie spektrum relaksacji, fundamentalne dla modeli konstytutywnych ośrodków liniowo lepkospreżystych, niesie pełną informację o właściwościach mechanicznych tych materiałów. Spektra relaksacji i retardacji są użytecznym narzędziem badania materiałów lepkospreżystych, ponieważ na ich podstawie można wyznaczyć dowolne inne liniowe charakterystyki opisujące materiały w dziedzinie czasu a także w dziedzinie częstotliwości, w szczególności te charakterystyki, które są wykorzystywane współcześnie w obliczeniach inżynierskich, wymagających jak FEM i BEM szczegółowej wiedzy o zjawiskach dynamicznych zachodzących w materiałach [11,14].

Zarówno spektrum retardacji jak i spektrum relaksacji nie są wprost dostępne pomiarowo, muszą więc być wyznaczone w oparciu o pomiarowo dostępne charakterystyki materiałów. Większość znanych w literaturze metod wyznaczania spektrum relaksacji lub retardacji, opracowanych głównie dla polimerów, bazuje na danych zgromadzonych w wyniku testu, w którym materiał poddawany jest odkształceniom oscylacyjnym o małej amplitudzie w dostatecznie dużym zakresie częstotliwości [4,12,14-15]. Tylko kilka metod, przeznaczonych głównie do wyznaczania spektrum relaksacji materiałów biologicznych, oparty jest o pomiary przeprowadzane w dziedzinie czasu [5,8,16,18-20,21]. Metody Ter Haara [21] i Fujihary i in. [5] nie gwarantują wyznaczenia spektrum relaksacji z zadowalającą dokładnością, przede wszystkim jednak nie uwzględniają złego uwarunkowania zadania identyfikacji spektrum, co praktycznie uniemożliwia ich zastosowanie w przypadku zakłóconych danych pomiarowych. W pracach [18-20] przedstawiono algorytmy identyfikacji spektrum czasów i częstotliwości relaksacji, w których dla zagwarantowania dobrego uwarunkowania zadania zastosowano różne techniki stabilizacji. W literaturze brak jest natomiast algorytmów identyfikacji spektrum retardacji na podstawie danych zgromadzonych w dziedzinie czasu w teście pełzania, który jest dla materiałów pochodzenia roślinnego podstawowym źródłem informacji o ich właściwościach mechanicznych [2,17].

W tej pracy zaprezentowano metodę wyznaczania spektrum częstotliwości retardacji na podstawie dyskretnych pomiarów funkcji pełzania zgromadzonych w standardowym teście pełzania, bazującą na sprowadzeniu ciągłego zagadnienia identyfikacji spektrum retardacji do liniowo-kwadratowego problemu dyskretnego za pomocą rozwinięcia spektrum względem ortonormalnej bazy w przestrzeni funkcyjnej. Jest to podejście stosowane zarówno w teorii aproksymacji, jak i w zadaniach identyfikacji obiektów dynamicznych z czasem ciągłym [1].

MATERIAŁ I METODY

Spektrum retardacji

W zakresie niewielkich deformacji związek między odkształceniem $\varepsilon(t)$ a naprężeniem $\sigma(t)$ w materiale lepkosprężystym opisuje całkowe równanie konstytutywne oparte o zasadę superpozycji Boltzmanna [3,14]

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

gdzie $J(t)$ jest funkcją pełzania (retardacji). Dla lepkosprężystych materiałów pochodzenia roślinnego, takich jak wysoko uwodnione warzywa i owoce, funkcja pełzania $J(t)$ jest dana modelem Kelvina [2,17]

$$J(t) = J_0 + \int_0^{\infty} L(\nu) (1 - e^{-t\nu}) d\nu \quad (1)$$

gdzie J_0 to podatność natychmiastowa, natomiast funkcja $L(\nu)$ oznacza spektrum częstotliwości retardacji, które charakteryzuje frakcję elementów modelu (1) o częstotliwościach retardacji zawierających się pomiędzy ν a $\nu + d\nu$ [3,14].

Identyfikacja [1] spektrum retardacji $L(\nu)$ sprowadza się do numerycznego problemu wyznaczenia rozwiązania całkowego równania Fredholma 1-go rodzaju (1) na podstawie dyskretnych danych pomiarowych. Praktyczna trudność w identyfikacji spektrum retardacji ma źródło w problemie matematycznym, bowiem jak wiadomo zadanie to jest źle postawionym problemem odwrotnym [14,15,22] i jego rozwiązanie wymaga stosowania specjalnych metod. W tej pracy zaproponowano metodę identyfikacji spektrum retardacji, w której spektrum retardacji $L(\nu)$ przybliża się kombinacją liniową ortonormalnych funkcji Legendre'a.

Podstawy matematyczne algorytmu

Będziemy zakładać, że funkcja $L(\nu) \in L_2(0, \infty)$. Funkcje Legendre'a dane wzorem [10]

$$p_k(\nu) = \sqrt{2\alpha(2k+1)} e^{-\alpha\nu} P_k(1 - 2e^{-2\alpha\nu}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

gdzie $P_k(x)$ są wielomianami Legendre'a zdefiniowanymi różniczkowym wzorem Rodriguesa [10]

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

tworzą zupełny ortonormalny układ bazowy w przestrzeni $L_2[0, \infty)$ funkcji całkownych z kwadratem w przedziale $[0, \infty)$.

Spektrum retardacji $L(\nu)$ będziemy przybliżać za pomocą kombinacji liniowej K pierwszych elementów ciągu funkcyjnego $\{p_k(\nu)\}$ postaci

$$L_K(\nu) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k p_k(\nu) \quad (3)$$

Oznacza to przybliżenie funkcji pełzania $J(t)$ funkcją

$$J_K(t) = J_0 + \sum_{k=0}^{K-1} g_k \varphi_k(t) \quad (4)$$

gdzie

$$\varphi_k(t) = \int_0^{\infty} p_k(v) (1 - e^{-tv}) dv \quad (5).$$

Podstawowe znaczenie dla konstrukcji algorytmu identyfikacji spektrum retardacji ma następujące twierdzenie, które precyzuje postać funkcji bazowych $\varphi_k(t)$ (5). Dowód twierdzenia podano w Dodatku.

Twierdzenie. Niech $k \geq 0$, $\alpha > 0$ i $t \geq 0$. Dla funkcji bazowych Legendre'a $p_k(v)$ funkcje $\varphi_k(t)$ (5) dane są wzorem

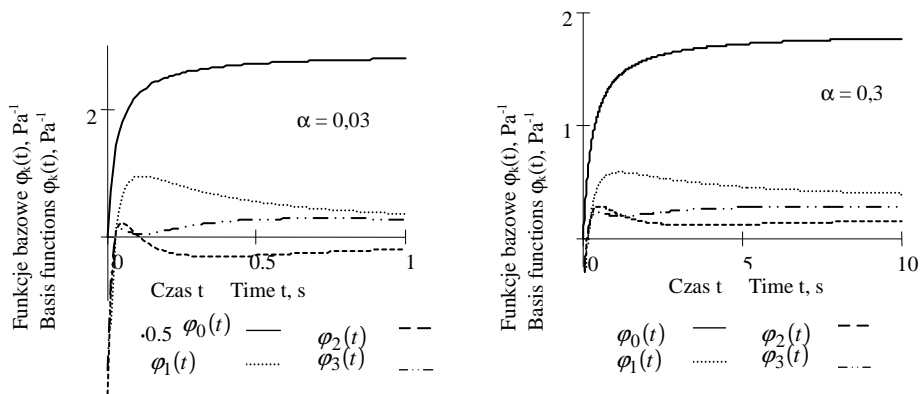
$$\varphi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha(2k+1)}} \left[1 - \alpha(2k+1) \frac{\prod_{i=0}^{k-1} [(2i+1)\alpha - t]}{\prod_{i=0}^k [(2i+1)\alpha + t]} \right], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

lub, równoważną, prostą formułą rekurencyjną

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(t) = \varphi_k(t) & \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)\alpha - t]}{[(2k+3)\alpha + t]} \\ & + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha(2k+3)}} \frac{t(k+1)}{(2k+1)[(2k+3)\alpha + t]}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

zaczynając od

$$\varphi_0(t) = \frac{\sqrt{2} t}{\sqrt{\alpha(\alpha + t)}} \quad (8)$$



Rys. 1. Funkcje bazowe $\varphi_k(t)$ (6) dla $k = 0 \div 3$, parametr $\alpha = 0,03$ i $\alpha = 0,3$

Fig. 1. The basis functions $\varphi_k(t)$ (6) for $k = 0 \div 3$, parameter $\alpha = 0.03$ and $\alpha = 0.3$

Funkcje $\varphi_k(t)$ (7) to funkcje wymierne zmiennej rzeczywistej $t \geq 0$. Przebieg kilku pierwszych funkcji $\varphi_k(t)$ dla dwu różnych parametrów α przedstawiono na rysunku 1.

Problem przybliżania spektrum retardacji $L(\nu)$ kombinacją liniową funkcji Legendre'a $L_K(\nu)$ został więc sprowadzony do problemu aproksymacji funkcji pełzania $J(t)$ skończoną sumą $J_K(t)$ (4) funkcji wymiernych $\varphi_k(t)$ (6).

Problem identyfikacji

Załóżmy, że przeprowadzono skończony eksperyment dyskretny, którego rezultatem jest zbiór pomiarów funkcji pełzania $\bar{J}(t_i) = J(t_i) + z(t_i)$ w chwilach czasu $t_i \geq 0, i = 1, \dots, N$, gdzie $z(t_i)$ jest addytywnym błędem pomiarowym. Jako miarę dokładności modelu (4) będziemy przyjmować klasyczny kwadratowy wskaźnik jakości, który definiując macierz i wektor

$$\Psi_{N,K} = \begin{bmatrix} \varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_{K-1}(t_1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(t_N) & \varphi_1(t_N) & \dots & \varphi_{K-1}(t_N) & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{J}_N = \begin{bmatrix} \bar{J}(t_1) \\ \vdots \\ \bar{J}(t_N) \end{bmatrix} \quad (9)$$

można zapisać w postaci

$$Q_N(\mathbf{g}_K) = \sum_{i=1}^N [\bar{J}(t_i) - J_K(t_i)]^2 = \|\bar{J}_N - \Psi_{N,K} \mathbf{g}_K\|^2 \quad (10)$$

gdzie $\mathbf{g}_K = [g_0 \dots g_{K-1} J_0]^T$ jest $(K+1)$ elementowym wektorem nieznanych współczynników w modelu (4), zaś $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową w przestrzeni R^N (dalej także w przestrzeniach R^K oraz R^{K+1}).

Problem identyfikacji spektrum retardacji w klasie funkcji $L_K(\nu)$ postaci (3) sprowadza się więc do rozwiązania, względem \mathbf{g}_K , klasycznego liniowego problemu najmniejszej sumy kwadratów

$$\min_{\mathbf{g}_K \in R^{K+1}} \|\bar{J}_N - \Psi_{N,K} \mathbf{g}_K\|^2 \quad (11)$$

Problem identyfikacji ciągłego spektrum retardacji został więc sprowadzony do dyskretnego problemu najmniejszych kwadratów (11). Jak wiadomo [9,18-20, 22] zadanie to jest źle postawione w sensie Hadamarda [22] i nawet bardzo małe błędy w pomiarach mogą spowodować znaczne fluktuacje rozwiązania. Tradycyjnie stosowanym remedium jest ograniczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych lub odpowiednia regularyzacja problemu [22]. W tej pracy stosujemy obie

techniki równocześnie. Funkcję $L(v)$ przybliżono kombinacją liniową funkcji Legendre'a (3), dla zapewnienia dobrego postawienia zadania zastosujemy technikę regularyzacji Tichonowa [22], polegającą na stabilizacji rozwiązania zadania (11) poprzez minimalizację zmodyfikowanego wskaźnika jakości

$$\min_{\mathbf{g}_K \in R^{K+1}} \|\bar{\mathbf{J}}_N - \Psi_{N,K} \mathbf{g}_K\|^2 + \lambda \|\mathbf{g}_K\|^2 \quad (12)$$

gdzie $\lambda > 0$ jest parametrem regularyzacji. Zadanie (12) jest dobrze uwarunkowane i posiada jednoznaczne rozwiązanie:

$$\mathbf{g}_K^\lambda = \left(\Psi_{N,K}^T \Psi_{N,K} + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1} \right)^{-1} \Psi_{N,K}^T \bar{\mathbf{J}}_N \quad (13)$$

gdzie $\mathbf{I}_{K,K}$ oznacza $K \times K$ wymiarową macierz jednostkową. Wektor \mathbf{g}_K^λ (13) jest ciągłą funkcją zarówno macierzy $\Psi_{N,K}$ jak i wektora $\bar{\mathbf{J}}_N$.

Wzór (13) ma znaczenie głównie teoretyczne, do konstrukcji numerycznego algorytmu wyznaczania macierzy odwrotnej w (13) zastosujemy technikę dekompozycji macierzy względem wartości szczególnych (SVD) [9]. Zastosowanie tej techniki uprości także rozwiązanie zadania doboru współczynnika regularyzacji.

Podstawy algebraiczne algorytmu

Niech rozkład SVD macierzy $\Psi_{N,K}$ przyjmuje postać [9]

$$\Psi_{N,K} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \quad (14)$$

gdzie macierz $\Sigma \in R^{N,K+1}$ jest macierzą utworzoną z niezerowych wartości szczególnych $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ macierzy $\Psi_{N,K}$ [9]

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$$

$r = \text{rzqd}(\Psi_{N,K})$, zaś $\mathbf{V} \in R^{K+1,K+1}$ i $\mathbf{U} \in R^{N,N}$ są macierzami ortonormalnymi. Na podstawie wzoru (14), wykorzystując ortonormalność macierzy \mathbf{V} , mamy

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{N,K}^T \Psi_{N,K} + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1} \right) &= \left(\mathbf{V} \Sigma^T \Sigma \mathbf{V}^T + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1} \right) \\ &= \mathbf{V} \left(\Sigma^T \Sigma + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1} \right) \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (15)$$

a stąd, wykorzystując ponownie ortonormalność macierzy \mathbf{V} , otrzymujemy

$$\left(\Psi_{N,K}^T \Psi_{N,K} + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1} \right)^{-1} = \mathbf{V} \left(\Sigma^T \Sigma + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1} \right)^{-1} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^T \quad (16)$$

gdzie \mathbf{A} jest $(K+1) \times (K+1)$ wymiarową macierzą diagonalną postaci

$$\mathbf{A} = \text{diag}\left(1/(\sigma_1^2 + \lambda), \dots, 1/(\sigma_r^2 + \lambda), 1/\lambda, \dots, 1/\lambda\right) \quad (17)$$

Ostatecznie więc na podstawie wzorów (13) oraz (15)-(17) parametr \mathbf{g}_K^λ dany jest formułą

$$\mathbf{g}_K^\lambda = \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Psi}_{N,K}^T \bar{\mathbf{J}}_N \quad (18)$$

Dobór parametru regularyzacji

Skuteczność stosowania techniki regularyzacji Tichonowa zależy od metody doboru parametru regularyzacji. Dobór współczynnika regularyzacji jest sztuką wymagającą zarówno intuicji, dobrych heurystyk, jak i często wiedzy apriorycznej o zakłóceniach. Generalnie parametr λ dobiera się tak, aby uzyskane rozwiązanie \mathbf{g}_K^λ było możliwie bliskie rozwiązaniu, jakie uzyskalibyśmy dla pomiarów bezszumowych. Wśród wielu metod zaproponowanych dla doboru parametru regularyzacji λ najczęściej wymienia się: zasadę nie zrównoważenia Morozowa, technikę L-krzywej, kryterium quasi-optymalności oraz uogólnioną metodę sprawdzania krzyżowego (*Generalized Cross Validation-GCV*). Dwie pierwsze metody wymagają znajomości wariancji zakłóceń obciążających pomiary, w pozostałych nie jest to konieczne. W pracy [18] zastosowano prostą regułę doboru współczynnika regularyzacji, która uwzględniając wprost wartość wskaźnika jakości identyfikacji, gwarantuje założoną dokładność modelu, podczas gdy w [19] parametr λ dobiera się tak, aby zagwarantować z góry założoną wartość normy z \mathbf{g}_K^λ .

W tej pracy stosujemy technikę *GCV*, o jej wyborze decyduje zarówno prosta idea, elegancja matematyczna oraz łatwy w implementacji algorytm jak i to, że dla zastosowania *GCV* nie jest niezbędna żadna wiedza aprioryczna o zakłóceniach w pomiarze funkcji pełzania. Schemat doboru współczynnika regularyzacji metodą sprawdzania krzyżowego (*CV*) został zaproponowany w [23], a następnie uogólniony w [7] i [13]. Idea *CV* jest następująca: dla danego parametru regularyzacji λ dzielimy zbiór danych na dwa podzbiory, jeden z nich jest wykorzystywany do wyznaczenia rozwiązania zregularyzowanego, drugi podzbiór zaś wykorzystywany jest do oceny błędu aproksymacji. Parametr λ dobiera się tak, aby minimalizował on sumę błędów dla danych z drugiego podzbioru dla wszystkich możliwych podziałów. W uogólnionej zasadzie sprawdzania krzyżowego, zachowując ideę *CV*, dane poddaje się pewnemu przekształceniu unitarnemu bazującemu na macierzy Fouriera [7,13], co oznacza, że *GCV* jest wersją *CV* inwariantną ze względu na obrót danych o wielokrotności kąta

$2\pi/N$. W pracach [7,13] pokazano, że dla układów liniowych parametr regularyzacji zgodnie z zasadą *GCV* dobiera się jako globalne minimum

$$\lambda_{GCV} = \arg \min_{\lambda > 0} V_{GCV}(\lambda) \quad (19)$$

tzw. funkcji *GCV* danej wzorem

$$V_{GCV}(\lambda) = \|\mathbf{r}(\lambda)\|^2 / (\text{trace}[M(\lambda)])^2$$

gdzie $M(\lambda)$ jest macierzą postaci

$$M(\lambda) = \mathbf{I}_{N,N} - \Psi_{N,K} (\Psi_{N,K}^T \Psi_{N,K} + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1})^{-1} \Psi_{N,K}^T$$

natomiast $\mathbf{r}(\lambda) = M(\lambda) \bar{\mathbf{J}}_N = \bar{\mathbf{J}}_N - \Psi_{N,K} \mathbf{g}_K^\lambda$ jest wektorem residualnym dla rozwiązania zregularyzowanego (13).

Wykorzystując rozkład *SVD* macierzy $\Psi_{N,K}$ (14), oraz wzory (16)-(18) i definiując N wymiarowy wektor $\mathbf{Y} = \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{J}}_N$, występującą w liczniku funkcji $V_{GCV}(\lambda)$ normę z wektora residualnego $\mathbf{r}(\lambda)$ można łatwo obliczyć jako funkcję wartości szczególnych $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ oraz składowych wektora \mathbf{Y} postaci:

$$\|\mathbf{r}(\lambda)\|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda^2 y_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda)^2} + \sum_{i=r+1}^N y_i^2$$

Również ślad występujący w mianowniku funkcji $V_{GCV}(\lambda)$ dany jest prostym wzorem

$$\text{trace}[M(\lambda)] = N - \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} = N - r + \sum_{i=1}^r \frac{\lambda}{\sigma_i^2 + \lambda}$$

a stąd funkcja *GCV* dana jest dogodnym wzorem analitycznym

$$V_{GCV}(\lambda) = \left[\sum_{i=1}^r \frac{\lambda^2 y_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda)^2} + \sum_{i=r+1}^N y_i^2 \right] / \left[N - r + \sum_{i=1}^r \frac{\lambda}{\sigma_i^2 + \lambda} \right]^2 \quad (20)$$

W pracy [7] pokazano, dla przypadku probabilistycznego, że funkcja $EV_{GCV}(\lambda)$ posiada w przedziale $[0, \infty)$ przynajmniej jedno minimum lokalne $\lambda_* \geq 0$. Generalnie jednak problem istnienia rozwiązania zadania optymalizacji (19) nie został rozstrzygnięty ani w pracach twórców metody i ich współpracowników [8,13], ani w licznych pracach poświęconych zastosowaniom zasady *GCV*. Oczywiście warunkiem koniecznym na to aby funkcja $V_{GCV}(\lambda)$ posiadała

minimum właściwe w przedziale $[0, \infty)$ jest istnienie $1 \leq i \leq r$, takiego że $y_i \neq 0$, w przeciwnym bowiem przypadku $V_{GCV}(\lambda)$ (20) jest funkcją monotonicznie malejącą dla $\lambda \in [0, \infty)$. Poniżej wykazano, iż dla rozpatrywanego zadania identyfikacji spektrum retardacji warunek ten jest spełniony.

Własność 1. Niech $K \geq 1$, $N \geq 1$ i $\alpha > 0$. Wówczas istnieje $1 \leq i \leq r$, takie że $y_i \neq 0$.

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że $y_i = 0$ dla $i = 1, \dots, r$. Niech

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = Y = U^T \bar{J}_N = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \bar{J}_N \quad (21)$$

gdzie $Y_1 \in R^r$, $Y_2 \in R^{N-r}$, $U_1 \in R^{N,r}$, a $U_2 \in R^{N, N-r}$ będzie rozkładem blokowym iloczynu $Y = U^T \bar{J}_N$. Również rozkład SVD (14) macierzy $\Psi_{N,K}$ można przedstawić w postaci blokowej

$$\Psi_{N,K} = U \Sigma V^T = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (22)$$

gdzie macierz $\Sigma_{11} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, zaś $V_1 \in R^{K+1,r}$ a $V_2 \in R^{K+1, K+1-r}$. Wyznamy iloczyn

$$W = \Psi_{N,K}^T \bar{J}_N = V \Sigma^T U^T \bar{J}_N = V \Sigma^T Y$$

Na podstawie (22) i (21) wykorzystując założenie $Y_1 = \mathbf{0}_r$, gdzie $\mathbf{0}_r$ oznacza r wymiarowy wektor zerowy, otrzymujemy

$$W = \Psi_{N,K}^T \bar{J}_N = V_1 \Sigma_{11} U_1^T \bar{J}_N = V_1 \Sigma_{11} Y_1 = \mathbf{0}_{K+1} \quad (23)$$

Równocześnie uwzględniając definicje macierzy $\Psi_{N,K}$ (9) i wektora \bar{J}_N (9), łatwo sprawdzić, że $W_{K+1} = \sum_{i=1}^N \bar{J}(t_i)$, a ponieważ $\bar{J}(t_i) > 0$ dla $i = 1, \dots, N$, również $W_{K+1} > 0$, co jest sprzeczne z (23) i kończy dowód. \square

Łatwo zauważyć, iż dowód tej własności wykorzystuje zarówno strukturę macierzy $\Psi_{N,K}$ o jednostkowych elementach ostatniej kolumny, która wynika ze struktury modelu Kelvina (1), jak i specyfikę procesu pełzania, w którym $\bar{J}(t_i) > 0$. Prosty wystarczający warunek *a posteriori* istnienia rozwiązania zadania (19) podaje kolejna własność.

Własność 2. Niech $K \geq 1$, $N \geq 1$, $\alpha > 0$ i $r = \text{rzqd}(\Psi_{N,K}) < N$. Jeśli

$$\left[\sum_{i=1}^N y_i^2 \right] [N-r]^2 \geq \left[\sum_{i=r+1}^N y_i^2 \right] [N]^2 \quad (24)$$

to istnieje rozwiązanie zadania (19) doboru współczynnika regularyzacji metodą GCV.

Dowód: Funkcja $V_{GCV}(\lambda)$ jest różniczkowalna dla dowolnego $\lambda \geq 0$, na podstawie wzoru (20) łatwo wyznaczyć formułę analityczną dla pochodnej $dV_{GCV}(\lambda)/d\lambda$, i sprawdzić, że w szczególności

$$\frac{dV_{GCV}(0)}{d\lambda} = -2 \left[\sum_{i=r+1}^N y_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^r 1/\sigma_i^2 \right] / [N-r]^3$$

czyli $dV_{GCV}(0)/d\lambda < 0$. Jeśli spełniona jest nierówność (24), to

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_{GCV}(\lambda) = \left[\sum_{i=1}^N y_i^2 \right] / [N]^2 \geq \left[\sum_{i=r+1}^N y_i^2 \right] / [N-r]^2 = V_{GCV}(0)$$

a to wraz z ciągłością funkcji $V_{GCV}(\lambda)$ implikuje istnienie jej minimum właściwego λ_{GCV} w przedziale $[0, \infty)$.

Funkcja $V_{GCV}(\lambda)$ jest różniczkowalna dla każdego λ , do rozwiązania zadania minimalizacji (19) można więc zastosować dowolną gradientową technikę optymalizacji.

WYNIKI I DYSKUSJA

Analiza

Zastąpienie wyjściowego zadania najmniejszych kwadratów (11) zmodyfikowanym problemem optymalizacji (12) służyło ograniczeniu fluktuacji rozwiązania \mathbf{g}_K^λ . Ocenę skuteczności tego podejścia umożliwia następujące oszacowanie wynikające wprost z Własności 1 w [18]

$$\left\| \mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}} \right\|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i^2 y_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda_{GCV})^2} < \sum_{i=1}^r \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} = \left\| \bar{\mathbf{g}}_K^N \right\|^2 \quad (25)$$

gdzie $\bar{\mathbf{g}}_K^N$ jest rozwiązaniem normalnym zadania (11). Równość we wzorze (25) ilustruje mechanizm stabilizacji rozwiązania $\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}$. Im większą wartość przy-

muje parametr λ_{GCV} , tym silniej ograniczone są fluktuacje wektora $\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}$. Szczegółowe omówienie procesu stabilizacji rozwiązania $\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}$ podano w [18].

Ponieważ funkcje bazowe $\{p_k(v)\}$ są ortonormalne w przestrzeni $L_2[0, \infty)$, dla dowolnego $L_K(v)$ postaci (3) zachodzi równość

$$\|L_K\|_1^2 = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} g_k g_j \int_0^\infty p_k(v) p_j(v) dv = \sum_{k=0}^{K-1} [g_k]^2$$

gdzie $\|\cdot\|_1$ oznacza normę kwadratową w przestrzeni $L_2[0, \infty)$. Stąd, ponieważ $\mathbf{g}_K = [g_0 \ \dots \ g_{K-1} \ J_0]^T$, otrzymujemy proste oszacowanie

$$\|L_K\|_1^2 = \sum_{k=0}^{K-1} [g_k]^2 = \|\mathbf{g}_K\|^2 - [J_0]^2 \leq \|\mathbf{g}_K\|^2 \tag{26}$$

Wygładzenie rozwiązania problemu dyskretnego (11) gwarantuje więc równocześnie ograniczenie fluktuacji spektrum retardacji $L_K(v)$, w szczególności zapewnia ograniczenie fluktuacji wyznaczonego spektrum

$$\hat{L}_K(v) = \sum_{k=0}^{K-1} g_K^{\lambda_{GCV}} p_k(v) \tag{27}$$

Funkcja $\hat{L}_K(v)$ (27) jest więc przybliżeniem w klasie funkcji (3) rzeczywistego spektrum retardacji $L(v)$ optymalnym w sensie kwadratowego wskaźnika jakości identyfikacji $Q_N(\mathbf{g}_K)$ (10) o ograniczonej fluktuacji $\|\hat{L}_K\|_1 < \|\bar{\mathbf{g}}_K^N\|$.

Spektrum $\hat{L}_K(v)$ (27) stanowi oczywiście jedynie przybliżenie spektrum, które można by uzyskać w klasie funkcji postaci (3), minimalizując wprost (bez regularyzacji) kwadratowy wskaźnik jakości identyfikacji dla pomiarów dokładnych, czyli przybliżenie funkcji

$$L_K^N(v) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k^N p_k(v) \tag{28}$$

gdzie \mathbf{g}_K^N jest rozwiązaniem normalnym wyjściowego zadania najmniejszych kwadratów (11), jakie uzyskalibyśmy dla pomiarów bezszumowych. Pokażemy, że dokładność aproksymacji zależy zarówno od zakłóceń w pomiarach, jak i współczynnika regularyzacji λ_{GCV} .

Własność 3. Niech $K \geq 1$, $N \geq 1$ i $\alpha > 0$. Zachodzą oszacowania

$$\|\hat{L}_K - L_K^N\|_1 \leq \|\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}} - \mathbf{g}_K^N\| \leq \lambda_{GCV} \sum_{i=1}^r \frac{|y_i|}{\sigma_i^3} + \gamma \|z_N\| \quad (29)$$

gdzie $z_N = [z(t_1) \dots z(t_N)]^T$, a $\gamma = \sum_{i=1}^r 1/\sigma_i > 0$.

Dowód: Ponieważ $\bar{\mathbf{g}}_K^N = \Psi_{N,K}^+ \bar{\mathbf{J}}_N$, gdzie $\Psi_{N,K}^+$ oznacza pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a [9] macierzy $\Psi_{N,K}$, łatwo sprawdzić, że

$$\|\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}} - \bar{\mathbf{g}}_K^N\|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_{GCV}^2 y_i^2}{\sigma_i^2 (\sigma_i^2 + \lambda_{GCV})^2} \leq \lambda_{GCV}^2 \sum_{i=1}^r \frac{y_i^2}{\sigma_i^6} \leq \lambda_{GCV}^2 \left[\sum_{i=1}^r \frac{|y_i|}{\sigma_i^3} \right]^2 \quad (30)$$

a stąd na podstawie nierówności trójkąta, oszacowania (26) oraz nierówności

$$\|\|\bar{\mathbf{g}}_K^N\| - \|\mathbf{g}_K^N\|\| \leq \|\bar{\mathbf{g}}_K^N - \mathbf{g}_K^N\| \leq \gamma \|z_N\|$$

otrzymujemy następujący ciąg oszacowań

$$\|\hat{L}_K - L_K^N\|_1 = \|\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}} - \mathbf{g}_K^N\| \leq \|\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}} - \bar{\mathbf{g}}_K^N\| + \|\bar{\mathbf{g}}_K^N - \mathbf{g}_K^N\| \leq \lambda_{GCV} \sum_{i=1}^r \frac{|y_i|}{\sigma_i^3} + \gamma \|z_N\|$$

czyli nierówność (29). □

Na podstawie nierówności (29) wektor współczynników $\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}$ dąży do wektora normalnego \mathbf{g}_K^N , liniowo ze względu na $\|z_N\|$, gdy równocześnie $\lambda_{GCV} \rightarrow 0$ i $\|z_N\| \rightarrow 0$. Nierówność (29) gwarantuje również zbieżność spektrum retardacji $\hat{L}_K(\nu)$ do $L_K^N(\nu)$ w każdym punkcie ν ich ciągłości, gdy $\lambda_{GCV} \rightarrow 0$ i $\|z_N\| \rightarrow 0$.

Z nierówności (29), równości we wzorze (30) oraz definicji stałej γ wynika, że dokładność aproksymacji rzeczywistego spektrum retardacji zależy od zakłóceń w pomiarach funkcji pełzania, wartości parametru λ_{GCV} oraz wartości szczególnych $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ macierzy $\Psi_{K,K}$, które z kolei zależą zarówno od doboru liczby funkcji bazowych $p_0(\nu), \dots, p_{K-1}(\nu)$, jak i parametru α .

Algorytm identyfikacji spektrum retardacji

1. Przeprowadź eksperyment (test pełzania [2,17]) i zgromadź pomiary $\bar{J}(t_i)$ funkcji pełzania w chwilach czasu $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$.
2. Oblicz macierz $\Psi_{K,K}$ (9), a następnie wyznacz jej rozkład SVD (14).

3. Wyznacz funkcję $V_{GCV}(\lambda)$ (20), a następnie wyznacz parametr λ_{GCV} rozwiązując zadanie optymalizacji (19).
4. Wyznacz macierz $(K + 1) \times (K + 1)$ wymiarową macierz diagonalną

$$\mathbf{A} = \text{diag}\left(1/(\sigma_1^2 + \lambda_{GCV}), \dots, 1/(\sigma_r^2 + \lambda_{GCV}), 1/\lambda_{GCV}, \dots, 1/\lambda_{GCV}\right)$$

5. Wyznacz rozwiązanie zregularyzowane $\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}$ zgodnie ze wzorem

$$\mathbf{g}_K^\lambda = \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Psi}_{N,K}^T \bar{\mathbf{J}}_N$$

6. Wyznacz spektrum częstotliwości retardacji $\hat{L}_K(\nu)$ dane sumą funkcji Legendre'a (27).

Uwaga 1: Rozkład *SVD* macierzy $\boldsymbol{\Psi}_{K,K}$ jest z numerycznego punktu widzenia głównym etapem algorytmu. Procedury *SVD* są dostępne w prawie każdym pakiecie obliczeniowym (np. *svds(A)* i *svd(A)* w Mathcadzie i *svd(A)* w Matlabie).

Uwaga 2: W przedstawionym algorytmie parametr $\alpha > 0$ umożliwia zmianę skali czasu. Zachodzi następująca prawidłowość: im mniejszą wartość przyjmuje parametr α tym krótsze są czasy, czyli większe częstotliwości retardacji. Prawidłowość tę ilustruje rysunek 1.

Uwaga 3: Dobierając parametr α optymalnie możemy zagwarantować lepsze dopasowanie modelu do danych eksperymentalnych. W tym celu należy procedurę identyfikacji rozszerzyć o nadrzędny moduł odpowiedzialny za dobór najlepszego parametru α . W praktyce wystarczy jednak zgrubna strategia doboru współczynnika α bazująca na porównaniu dla różnych wartości stałej α uzyskanych eksperymentalnie przebiegów czasowych funkcji pełzania $\bar{J}(t)$ oraz kilku pierwszych elementów ciągu funkcyjnego $\{\varphi_k(t)\}$. W ten sposób można także wstępnie oszacować liczbę K składników sumy (3), lub równoważnie (4).

Przykład numeryczny

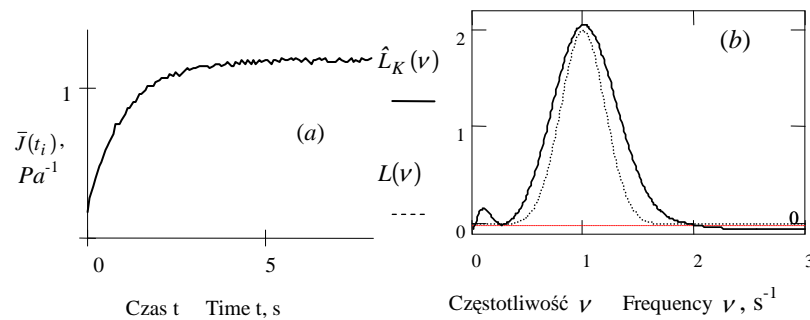
Rozważmy materiał lepkosprężysty, którego spektrum retardacji dane jest rozkładem Gaussa

$$L(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho} e^{-(\nu - \nu_0)^2 / (2 \rho^2)}$$

z parametrami $\nu_0 = 1$ i $\rho = 0.2$, podatność natychmiastowa $J_0 = 0.2 \text{ Pa}^{-1}$. Przebieg funkcji pełzania $\bar{J}(t) = J(t) + z(t)$ z addytywnymi zakłóceniami pomiarowymi $z(t)$ o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[-0.02, 0.02]$

przedstawia rysunek 2(a). Funkcję $\bar{J}(t)$ spróbkowano w $N = 100$ punktach pomiarowych ze stałym okresem próbkowania $\Delta t = 0.06$. Parametry $K = 6$ i $\alpha = 0.3$ zostały dobrane zgodnie z opisaną powyżej procedurą, współczynnik regularyzacji $\lambda_{GCV} = 0.112 \cdot 10^{-2}$. Przebiegi „rzeczywistego” spektrum retardacji $L(\nu)$ oraz jego przybliżenia $\hat{L}_K(\nu)$ przedstawiono na rysunku 2(b). Normy z rozwiązania normalnego i zregularyzowanego oraz odpowiednie wartości wskaźnika jakości identyfikacji są następujące:

$$\|\bar{g}_K^N\| = 16.34, \quad \|\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}\| = 1.352, \quad Q_N(\bar{g}_K^N) = 1.172 \cdot 10^{-2} \quad \text{i} \quad Q_N(\mathbf{g}_K^{\lambda_{GCV}}) = 1.181 \cdot 10^{-2}.$$



Rys. 2. Przebieg funkcji pełzania $\bar{J}(t_i) = J(t_i) + z(t_i)$ z zakłóceniami pomiarowymi (a), Spektrum retardacji $L(\nu)$ (linia przerywana) i przybliżenie $\hat{L}_K(\nu)$ (linia ciągła) (b)

Fig. 2. Creep compliance $\bar{J}(t_i) = J(t_i) + z(t_i)$ corrupted by additive noise (a), Retardation spectrum $L(\nu)$ (dash line) and approximation $\hat{L}_K(\nu)$ (solid line) (b)

WNIOSKI

1. Przybliżenie funkcji $L(\nu)$ wielomianem funkcyjnym $L_K(\nu)$ ogranicza zbiór rozwiązań dopuszczalnych do skończenie wymiarowej podprzestrzeni $\text{Lin}\{p_0, p_1, \dots, p_{K-1}\} \subset L_2(0, \infty)$. W konsekwencji problem identyfikacji ciągłego spektrum retardacji został sprowadzony do statycznego dyskretnego źle uwarunkowanego problemu najmniejszych kwadratów. Stabilizację jego rozwiązania zapewnia zastosowanie techniki regularyzacji Tichonowa, dobór współczynnika regularyzacji umożliwia efektywna obliczeniowo uogólniona metoda sprawdzania krzyżowego.

2. Dobór ortonormalnych funkcji bazowych gwarantuje, iż wygładzenie zregularyzowanego rozwiązania tego problemu zapewnia wygładzenie wyznaczonego spektrum retardacji.

3. Wybór parametru α oraz liczby K funkcji bazowych zależy zarówno od wiedzy apriorycznej o badanym procesie, jak i od informacji, którą dysponujemy *a posteriori* po zgromadzeniu i wstępnej analizie wyników eksperymentu. Ostatecznie jednak o wyborze konkretnych wartości tych parametrów decyduje przede wszystkim jakość aproksymacji rzeczywistego spektrum retardacji mierzona wartością wskaźnika jakości identyfikacji, jaką te parametry gwarantują.

4. Zastosowanie funkcji bazowych, dla których całki (5) dane są prostymi formułami analitycznymi, pozwoliło także, co szczególnie istotne w kontekście źle postawionego problemu odwrotnego, uniknąć błędów przybliżeń kwadratur numerycznego całkowania, występujących w znanych algorytmach [4,12,15] wyznaczania ciągłego spektrum relaksacji i retardacji.

DODATEK

Dowód Twierdzenia. Łatwo zauważyć, że całkę $\phi_k(t)$ (5) można przedstawić jako różnicę dwu całek

$$\phi_k(t) = \int_0^\infty p_k(v) dv - \int_0^\infty p_k(v) e^{-tv} dv = \phi_k(0) - \phi_k(t) \quad (D1)$$

gdzie funkcja $\phi_k(t)$ jest zdefiniowana następująco

$$\phi_k(t) = \int_0^\infty p_k(v) e^{-tv} dv \quad (D2)$$

Najpierw pokażemy że całki $\phi_k(t)$ dane są następującym wzorem

$$\phi_k(t) = \sqrt{2\alpha(2k+1)} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} [(2i+1)\alpha - t]}{k \prod_{i=0}^{k-1} [(2i+1)\alpha + t]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (D3)$$

Dowód wzoru (D3) przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Aby wykazać słuszność wzoru (D3) dla $k = 0$ i $k = 1$ wystarczy, wykorzystując równości $P_0(x) = 1$ i $P_1(x) = x$ [10], wyznaczyć całki $\phi_0(t)$ i $\phi_1(t)$ na podstawie wzoru definicyjnego (D2) i sprawdzić, że są one dane wzorem (D3). Kolejno

$$\phi_0(t) = \sqrt{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha v} e^{-tv} dv = \sqrt{2\alpha} \frac{1}{(\alpha + t)} = \sqrt{2\alpha} / \prod_{i=0}^0 [(2i+1)\alpha + t]$$

i podobnie całka $\phi_1(t)$ jest równa

$$\phi_1(t) = \sqrt{6\alpha} \int_0^{\infty} (1 - 2e^{-2\alpha v}) e^{-\alpha v} e^{-tv} dv = \sqrt{6\alpha} (\alpha - t) / [(\alpha + t)(3\alpha + t)]$$

czyli

$$\phi_1(t) = \sqrt{2\alpha(2+1)} \prod_{i=0}^0 [(2i+1)\alpha - t] / \prod_{i=0}^1 [(2i+1)\alpha + t]$$

Założmy teraz, że równość (D3) jest prawdziwa dla $(k-1)$ i k , gdzie $k \geq 1$. Pokażemy, że wzór (D3) jest prawdziwy również dla $(k+1)$. Wykorzystując tożsamość $(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$ [10, wzór (23,1)] oraz wzory definicyjne (2) i (D2) otrzymujemy równość

$$(k+1)\phi_{k+1}(t) = \sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1} \phi_k(t) - 2\sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1} \phi_k(t+2\alpha) - \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k-1}} k \phi_{k-1}(t)$$

czyli równoważnie

$$\phi_{k+1}(t) = \frac{\sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}}{(k+1)} [\phi_k(t) - 2\phi_k(t+2\alpha)] - \frac{k\sqrt{2k+3}}{(k+1)\sqrt{2k-1}} \phi_{k-1}(t) \quad (D4)$$

Ponieważ

$$\prod_{i=0}^{k-1} [(2i+1)\alpha - t - 2\alpha] = -(t+\alpha) \prod_{i=0}^{k-2} [(2i+1)\alpha - t]$$

i podobnie

$$\prod_{i=0}^k [(2i+1)\alpha + t + 2\alpha] = \frac{1}{(t+\alpha)} \prod_{i=0}^{k+1} [(2i+1)\alpha + t]$$

na podstawie wzoru (D3) dla k otrzymujemy

$$\begin{aligned} \phi_k(t+2\alpha) &= -(\alpha+t)^2 \sqrt{2\alpha(2k+1)} \prod_{i=0}^{k-2} [(2i+1)\alpha - t] / \prod_{i=0}^{k+1} [(2i+1)\alpha + t] \\ &= -\frac{(\alpha+t)^2}{[(2k-1)\alpha - t][(2k+3)\alpha + t]} \phi_k(t) \end{aligned} \quad (D5)$$

Następnie, na podstawie wzorów (D4) i (D5), uwzględniając formułę (D3) dla $(k - 1)$ i k , po prostych przekształceniach algebraicznych, otrzymujemy wzór (D3) dla $(k + 1)$.

Obecnie przejdziemy do wykazania słuszności wzoru (6); wykorzystamy wzór (D1). Na mocy wzoru (D3) dla dowolnego $k \geq 0$

$$\phi_k(0) = \sqrt{2\alpha(2k+1)} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} [(2i+1)\alpha]}{\prod_{i=0}^k [(2i+1)\alpha]} = \frac{\sqrt{2\alpha(2k+1)}}{(2k+1)\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha(2k+1)}} \quad (D6)$$

a stąd na podstawie wzorów (D3) oraz (D1) otrzymujemy dla $k \geq 0$

$$\phi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha(2k+1)}} - \sqrt{2\alpha(2k+1)} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} [(2i+1)\alpha - t]}{\prod_{i=0}^k [(2i+1)\alpha + t]}$$

skąd po prostych przekształceniach natychmiast wynika wzór (6).

Wzór (8) wynika z (6) dla $k = 0$. Aby udowodnić słuszność reguły rekurencyjnej (7) wystarczy zauważyć, że na podstawie wzoru (D3) dla każdego $k \geq 0$ zachodzi zależność rekurencyjna

$$\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t) \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)\alpha - t]}{[(2k+3)\alpha + t]}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Stąd, wykorzystując wzór (D1), otrzymujemy równość

$$\phi_{k+1}(t) = \phi_k(0) \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)]}{[(2k+3)]} - \phi_k(t) \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)\alpha - t]}{[(2k+3)\alpha + t]}$$

czyli, wykorzystując ponownie wzór (D1), mamy

$$\phi_{k+1}(t) = \phi_k(0) \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)]}{[(2k+3)]} - [\phi_k(0) - \phi_k(t)] \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)\alpha - t]}{[(2k+3)\alpha + t]}$$

a stąd, ponieważ na podstawie wzoru (D3) $\phi_k(0) = \sqrt{2\alpha}/\sqrt{2k+1}$, otrzymujemy

$$\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t) \frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}} \frac{[(2k+1)\alpha - t]}{[(2k+3)\alpha + t]} + \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2k+3}} \left[1 - \frac{(2k+3)}{(2k+1)} \frac{[(2k+1)\alpha - t]}{[(2k+3)\alpha + t]} \right]$$

skąd po prostych przekształceniach algebraicznych wynika wzór (7). \square

PIŚMIENNICTWO

1. **Bubnicki Z.:** Identification of Control Plants. PWN, Warszawa, Elsevier, Amsterdam, 1980.
2. **Bzowska-Bakalarz M.:** Właściwości mechaniczne korzeni buraków cukrowych. Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie, 166, 1994.
3. **Christensen R. M.:** Theory of Viscoelasticity. An Introduction. Academic Press, New York, 1971.
4. **Elster C., Honerkamp J., Weese J.:** Using regularization methods for the determination of relaxation and retardation spectra of polymeric liquids. Rheological Acta, 30, 161-174, 1991.
5. **Fujihara S., Yamamoto R., Masuda Y.:** Maxwellian Spectra of Stress Relaxation in the Cell Wall and Growth Regulation in Higher Plants. Proc. of Int. Workshop Stress Relaxation in Solids and Biological Origin, 47-51, Prague, 1995.
6. **Golub G.H., Heath M.T., Wahba G.:** Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. Technometrics, 21, 215-223, 1979.
7. **Gu Ch., Heckman N., Wahba G.:** A note on generalized cross-validation with replicates. Statistics & Probability Letters, 14, 283-287, 1992.
8. **Hellebrand H. J.:** Comparison of Models for Evaluation of Stress Relaxation. Proc. of Int. Workshop Stress Relaxation in Solids and Biological Origin, 3-10, Prague, 1995.
9. **Kaczorek T.:** Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa, 1998.
10. **Lebiediew N.N.:** Funkcje specjalne i ich zastosowania. PWN, Warszawa, 1957.
11. **Lemaitre J. (Ed.):** Handbook of Materials Behavior Models, Academic Press, New York, 2001.
12. **Malkin A. Ya., Masalova I.:** From dynamic modulus via different relaxation spectra to relaxation and creep functions. Rheol. Acta, 40, 261-271, 2001.
13. **Nguyen N., Milanfar P., Golub G.:** A computationally efficient superresolution image reconstruction algorithm. IEEE Trans. Image Processing, 10(4), 573-583, 2001.
14. **Owens R. G., Phillips T. N.:** Computational Rheology. Imperial College Press London, 2002.
15. **Paulson K. S., Jouravleva S., McLeod C. N.:** Dielectric Relaxation Time Spectroscopy. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, 47, 1510-1517, 2000.
16. **Ptaszek P., Grzesik M.:** Lepkosprężyste zjawiska retardacyjne w modelowym układzie skrobia kukurydziana-guma guar. Acta Agrophysica, 3(3), 573-578, 2004.
17. **Rao M.A.:** Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications. Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland, 1999.
18. **Stankiewicz A.:** Algorytm identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji biologicznych materiałów lepkoelastycznych. Acta Sci. Pol., Seria Technica Agraria, 2(2), 77-91, 2003.
19. **Stankiewicz A.:** Metoda optymalnej identyfikacji ciągłego spektrum relaksacji materiałów lepkoelastycznych. Inżynieria Rolnicza, 12(54), 373-384, 2003.
20. **Stankiewicz A., Gołacki K.:** Metoda wyznaczania ciągłego spektrum relaksacji lepkoelastycznych materiałów roślinnych. Acta Agrophysica, 2(3), 627-638, 2003.
21. **Ter Haar D.:** A Phenomenological Theory of Visco-Elastic Behaviour. I. Physica, XVI, 719-737, 1950.
22. **Tikhonov A. N., Arsenin V. Y.:** Solutions of Ill-posed Problems. Wiley, New York, 1977.
23. **Wahba G., Wold S.:** A completely automatic French curve: fitting splines by cross validation. Communications Statistics, 4, 1-17, 1975.

APPROXIMATION OF THE RETARDATION SPECTRUM
OF VISCOELASTIC PLANT MATERIALS USING LAGENDRE FUNCTIONS

Anna Stankiewicz

Department of Technical Science, University of Agriculture
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: anna.stankiewicz@ar.lublin.pl

Abstract. The paper deals with the problem of direct recovery of continuous retardation spectrum of linear viscoelastic materials from discrete-time noise measurements of creep compliance obtained in a standard creep experiment. An optimal orthogonal scheme of the spectrum approximation by the finite series of Legendre functions is presented. Since the problem of retardation spectrum identification is practically an ill-posed problem of reconstructing solution of Fredholm integral equation of the first kind from measured data, Tikhonov regularization with generalized cross validation (*GCV*) is used to guarantee the stability of the scheme. It is proved that the accuracy of the spectrum approximation depends both on measurement noises and regularization parameter as well as on the proper selection of the basic orthogonal functions. Numerical calculations on model data are enclosed.

Keywords: viscoelasticity, retardation spectrum, identification algorithm, regularization, Legendre functions