

## JAK DOBRZE POSTAWIĆ PROBLEM IDENTYFIKACJI SPEKTRUM RELAKSACJI ROŚLINNYCH MATERIAŁÓW LEPKOSPREŻYSTYCH

*Anna Stankiewicz*

Katedra Podstaw Techniki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie  
ul. Doświadczalna 50A, 20-282 Lublin  
e-mail: [anna.stankiewicz@up.lublin.pl](mailto:anna.stankiewicz@up.lublin.pl)

**Streszczenie.** W pracy rozważa się problem wyznaczania spektrum relaksacji materiałów lepkospreżytych na podstawie dyskretnych zakłóconych pomiarów modułu relaksacji zgromadzonych w teście relaksacji naprężeń. Zadanie to jest źle postawionym problemem odwrotnym. Celem pracy jest przedstawienie remedium, jakim jest ograniczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych i zastosowanie techniki regularyzacji. Skuteczność tego podejścia zilustrowano na przykładzie numerycznym oraz dla zadania identyfikacji spektrum relaksacji próbki buraka cukrowego odmiany Janus badanego w stanie jednoosiowego odkształcenia w warunkach obciążeń udarowych.

**Słowa kluczowe:** lepkospreżystość, spektrum relaksacji, problem źle postawiony, regularyzacja

### WSTĘP

Zadanie identyfikacji spektrum relaksacji  $H(\nu)$  zdefiniowanego równaniem

$$G(t) = \int_0^{\infty} H(\nu) e^{-t\nu} d\nu, \quad (1)$$

gdzie  $\nu$  oznacza częstotliwość relaksacji, na podstawie dyskretnych pomiarów modułu relaksacji  $G(t)$  to problem numerycznego rozwiązania jednorodnego całkowego równania Fredholma 1-go rodzaju (1). Jest to źle postawiony problem odwrotny (Groetsch 1993, Stankiewicz 2007). Jego rozwiązanie – jeśli istnieje – jest niejednoznaczne i nieciągłe względem danych pomiarowych. Oznacza to, że nawet bardzo małe wahania danych zadania (w tym niewielkie zakłócenia) mogą powodować bardzo duże fluktuacje wyznaczonego modelu. Zjawisko to ilustrują podane w pracy Stankiewicz (2010a) przykłady identyfikacji spektrum relaksacji danego rozkładem Gaussa oraz spektrum próbki buraka cukrowego.

W pracy Stankiewicz (2010a) wskazano, iż remedium w takim przypadku może być ograniczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych lub odpowiednia regularyzacja zadania oryginalnego. W przedstawionym poniżej schemacie identyfikacji spektrum relaksacji zastosowano obie techniki równocześnie.

Najczęściej stosowaną techniką regularyzacji jest metoda Tichonowa (Tikhonov i Arsenin 1977), która dla oryginalnego zadania najmniejszych kwadratów

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \|\bar{y} - \mathbf{M}x\|_{\mathcal{Y}}^2, \quad (2)$$

gdzie  $\bar{y} = y + z$  jest danym elementem przestrzeni Hilberta  $\mathcal{Y}$  o normie  $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ ,  $z$  oznacza zakłócenia, a operator  $\mathbf{M} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  jest znany, polega na stabilizacji rozwiązania zadania (2) poprzez rozwiązanie zmodyfikowanego problemu postaci

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \|\bar{y} - \mathbf{M}x\|_{\mathcal{Y}}^2 + \lambda \|x\|_{\mathcal{X}}^2. \quad (3)$$

W zadaniu tym  $\lambda > 0$  jest parametrem regularyzacji.

Jeśli operator  $\mathbf{M}$  jest liniowy, a przestrzeń  $\mathcal{X}$  jest przestrzenią Hilberta, to operator  $\mathbf{M}^* \mathbf{M} + \lambda \mathbf{I}$  jest odwracalny dla każdego  $\lambda > 0$ . Zadanie (3) jest wówczas dobrze postawione, a jego jednoznaczne rozwiązanie dane jest wzorem

$$x^\lambda = (\mathbf{M}^* \mathbf{M} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}^* \bar{y} \quad (4)$$

i jest to rozwiązanie o najmniejszej normie.

W zadaniu identyfikacji modelu Maxwella jako antidotum wobec złego uwarunkowania zadania zastosowano tylko regularyzację problemu oryginalnego (Stankiewicz 2010b). Celem tej pracy jest przedstawienie podejścia, w którym dla zadania identyfikacji spektrum relaksacji ograniczono zbiór rozwiązań dopuszczalnych, a następnie zapewniono stabilizację jego rozwiązania stosując technikę regularyzacji Tichonowa. Oprócz przykładu numerycznego podano przykład identyfikacji spektrum relaksacji próbki buraka cukrowego Janus badanego w stanie jednoosiowego odkształcenia w warunkach obciążeń udarowych.

#### IDENTYFIKACJA SPEKTRUM RELAKSACJI

Założmy, że spektrum częstotliwości relaksacji  $H(\nu)$  zdefiniowane jednorodnym całkowym równaniem Fredholma 1-go rodzaju (1) jest funkcją całkowalną z kwadratem w przedziale  $(0, \infty)$ , czyli  $H(\nu) \in L^2(0, \infty)$ . Warunki istnienia spektrum relaksacji całkowalnego z kwadratem podano w (Stankiewicz 2010c). Niech

zbiór liniowo niezależnych ortonormalnych funkcji  $\{h_1(\nu), h_2(\nu), h_3(\nu), \dots\}$  tworzy zupełny układ bazowy w przestrzeni Hilberta  $L^2(0, \infty)$ . Spektrum relaksacji  $H(\nu)$  można rozwinąć w nieskończony szereg  $H(\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k h_k(\nu)$ , w którym współczynniki  $g_k = \int_0^{\infty} H(\nu) h_k(\nu) d\nu$ . Aby ograniczyć zbiór rozwiązań dopuszczalnych zastąpimy szereg nieskończony skończoną sumą  $K$  pierwszych jego składników, czyli spektrum  $H(\nu)$  będziemy przybliżać szeregiem postaci

$$H_K(\nu) = \sum_{k=1}^K g_k h_k(\nu). \quad (5)$$

Przyjęcie modelu (5) oznacza przybliżenie modułu relaksacji  $G(t)$  szeregiem

$$G_K(t) = \int_0^{\infty} H_K(\nu) e^{-t\nu} d\nu = \sum_{k=1}^K g_k \phi_k(t), \quad (6)$$

gdzie funkcje

$$\phi_k(t) = \int_0^{\infty} h_k(\nu) e^{-t\nu} d\nu. \quad (7)$$

Zarówno model  $H_K(\nu)$  (5) jak i moduł relaksacji  $G_K(t)$  (6) wyznaczony na jego podstawie zależą liniowo od parametrów  $g_k$ .

Będziemy zakładać, że przeprowadzono eksperyment, którego rezultatem jest zbiór pomiarów modułów relaksacji  $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$  w chwilach czasu  $t_i \geq 0$ , gdzie  $z(t_i)$  jest addytywnym błędem pomiarowym,  $i = 1, \dots, N$ . Rozpatrywany tu problem optymalnej identyfikacji spektrum relaksacji  $H(\nu)$  w klasie modeli (5) polega na takim doborze parametrów  $g_k$ , aby model  $G_K(t)$  (6) przybliżał dane eksperymentalne  $\{\bar{G}(t_i)\}$  jak najlepiej w sensie wskaźnika kwadratowego

$$Q(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^N [\bar{G}(t_i) - G_K(t_i)]^2 = \|\bar{\mathbf{G}} - \Phi \mathbf{g}\|_2^2, \quad (8)$$

$\|\cdot\|_2$  oznacza tu normę kwadratową w odpowiedniej przestrzeni euklidesowej, wektor  $\bar{\mathbf{G}} = [\bar{G}(t_1) \dots \bar{G}(t_N)]^T$ , a wektor  $\mathbf{g}$  nieznanymi współczynnikami w modelach (5), (6) i macierz  $\Phi$  zdefiniowane są jako

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \dots & \phi_K(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(t_N) & \dots & \phi_K(t_N) \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_K \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Problem identyfikacji spektrum relaksacji w klasie funkcji  $H_K(v)$  postaci (5) sprowadza się więc do rozwiązania liniowego zadania najmniejszej sumy kwadratów ze wskaźnikiem (8). Przybliżenie funkcji  $H(v)$  szeregiem  $H_K(v)$  ogranicza zbiór rozwiązań dopuszczalnych do skończonej wymiarowej podprzestrzeni  $\text{Lin}\{h_1(v), \dots, h_K(v)\}$  przestrzeni  $L^2(0, \infty)$ . W konsekwencji problem identyfikacji spektrum relaksacji został sprowadzony do dyskretnego problemu najmniejszej sumy kwadratów, w którym jednak zazwyczaj macierz  $\Phi$  już dla niewielkich wartości  $K$  jest niepełnego rzędu kolumnowego. Zadanie jest wówczas wciąż zadaniem źle postawionym w sensie Hadamarda. Dla stabilizacji jego rozwiązania zastosujemy technikę regularyzacji Tichonowa, która w tym problemie polega na minimalizacji wskaźnika jakości  $\|\bar{\mathbf{G}} - \Phi \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{g}\|_2^2$ . Optymalny parametr dany jest wzorem (por. (4))

$$\mathbf{g}^\lambda = (\Phi^T \Phi + \lambda \mathbf{I}_{K,K})^{-1} \Phi^T \bar{\mathbf{G}}, \quad (10)$$

gdzie  $\mathbf{I}_{K,K}$  jest  $K$  wymiarową macierzą jednostkową.

Spośród wielu heurystyk zaproponowanych dla doboru parametru regularyzacji  $\lambda$  zastosujemy tu uogólnioną metodę sprawdzania krzyżowego (ang. *Generalized Cross Validation – GCV*). O jej wyborze decyduje zarówno prosta idea, elegancja matematyczna oraz łatwy w implementacji algorytm, jak i to, że dla zastosowania metody *GCV* nie jest niezbędna wiedza aprioryczna o zakłóceniach pomiarowych. W pracach (Golub i in. 1979, Nguyen i in. 2001) pokazano, że w przypadku zadań liniowo-kwadratowych parametr regularyzacji zgodnie z zasadą *GCV* dobiera się jako globalne minimum

$$\lambda_{GCV} = \arg \min_{\lambda > 0} V_{GCV}(\lambda) \quad (11)$$

tzw. funkcji *GCV* danej wzorem  $V_{GCV}(\lambda) = \|\mathbf{r}(\lambda)\|^2 / \text{tr}[\mathbf{M}(\lambda)]^2$ , gdzie macierz  $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{I}_{N,N} - \Phi(\Phi^T \Phi + \lambda \mathbf{I}_{K,K})^{-1} \Phi^T$ , natomiast  $\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda) \bar{\mathbf{G}}$  jest wektorem residualnym dla rozwiązania zregularyzowanego (10).

Uwzględniając powyższe rozważania model spektrum relaksacji można wyznaczyć stosując następujący schemat identyfikacji:

1. Przeprowadź eksperyment (test relaksacji naprężeń (Rao 1999)) i zgromadź pomiary  $\bar{G}(t_i)$  modułu relaksacji w chwilach czasu  $t_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, N$ .
2. Wyznacz macierz  $\Phi$  (9).
3. Wyznacz funkcję  $V_{GCV}(\lambda)$ , a następnie wyznacz parametr  $\lambda_{GCV}$  rozwiązując zadanie optymalizacji (11).
4. Wyznacz rozwiązanie zregularyzowane  $\mathbf{g}^{\lambda_{GCV}}$  zgodnie ze wzorem (10).
5. Wyznacz spektrum częstotliwości relaksacji dane skończonym szeregiem funkcyjnym  $\hat{H}_K(\nu) = \sum_{k=1}^K g_k^{\lambda_{GCV}} h_k(\nu)$ .

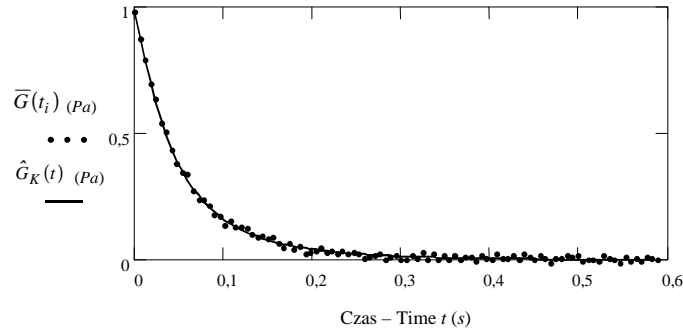
W rozprawie Stankiewicz (2007) oraz innych pracach autorki, przykładowo (Stankiewicz 2003, 2004, 2005, 2010d) poświęconych identyfikacji spektrum relaksacji oraz spektrum retardacji zaproponowano algorytmy identyfikacji wykorzystujące różne funkcje bazowe (funkcje Laguerre'a, Legendre'a, Hermitte'a, Bessela, Czebyszewa). Poniżej, w dodatku A, podano przykład algorytmu wykorzystującego układ funkcji bazowych Laguerre'a. W pracach tych przeanalizowano także szczegółowo własności algorytmów, pokazano ich stabilność i wygładzenie spektrum relaksacji, zbadano wpływ zakłóceń pomiarowych na wyznaczone spektrum. Podano tam także wskazówki dotyczące doboru parametrów funkcji bazowych oraz ich liczby (por. też Dodatek A). Szczegółowo omówiono również realizację obliczeń algebraicznych algorytmu z wykorzystaniem standardowego dziś na gruncie algebry liniowej rozkładu macierzy względem wartości szczególnych *SVD*.

Poniżej zilustrujemy skuteczność tego podejścia dla zadań identyfikacji spektrum relaksacji rozpatrywanych w pracy Stankiewicz (2010a).

**Przykład 1.** Rozważmy ponownie materiał lepkosprężysty o spektrum relaksacji

$$H(\nu) = e^{-(\nu-20)^2/72} / \sqrt{6\sqrt{2\pi}}. \quad (12)$$

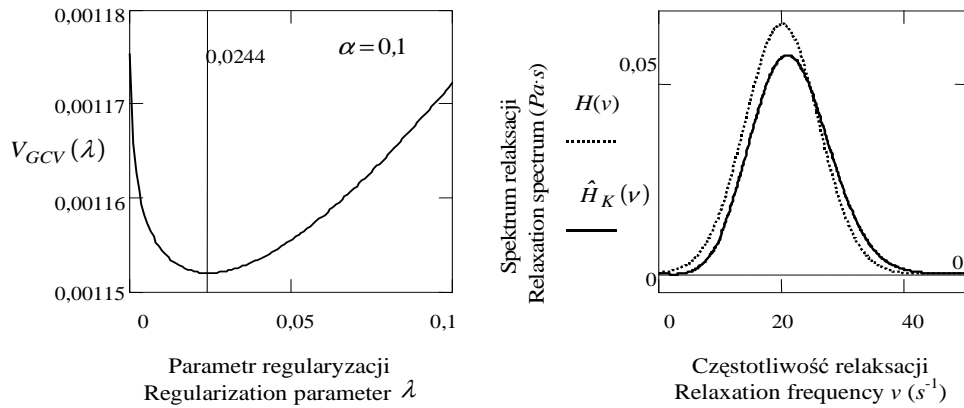
z przykładu 3 w Stankiewicz (2010a). Moduł  $\bar{G}(t) = G(t) + z(t)$  spróbkowano w  $N=200$  punktach ze stałym okresem próbkowania  $\Delta t = 0,003$  s gromadząc pomiary  $\bar{G}(t_i)$  (rys. 1).



**Rys. 1.** Pomiary modułu relaksacji  $\bar{G}(t_i)$  (punkty) oraz jego model  $\hat{G}_K(t)$  (linia ciągła)

**Fig. 1.** The relaxation modulus measurements  $\bar{G}(t_i)$  (points) and the model  $\hat{G}_K(t)$  (solid line)

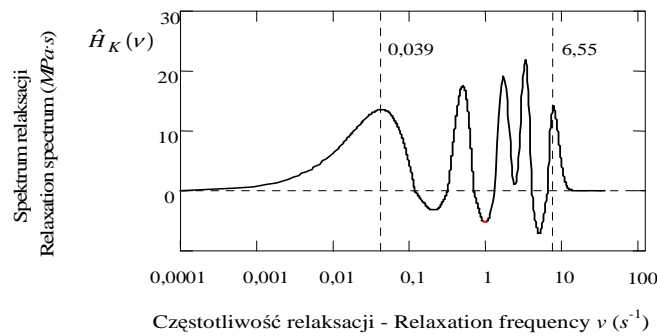
Zastosowano algorytm Laguerre'a, parametry  $K=10$  i  $\alpha=0,1$  s dobrano zgodnie ze wskazówkami z Dodatku A. Współczynnik regularyzacji  $\lambda_{GCV} = 0,0244$ . Przebieg funkcji  $GCV$  przedstawia rysunek 2(A), posiada ona jednoznaczne minimum globalne. Wskaźnik jakości modelu  $Q(g^{\lambda_{GCV}}) = 0,0116$ . Przebieg funkcji  $\hat{G}_K(t) = \sum_{k=1}^K g_k^{\lambda_{GCV}} \phi_k(\nu)$  przedstawia rysunek 1. Na rysunku 2(B) przedstawiono spektrum  $H(\nu)$  (12) oraz jego przybliżenie  $\hat{H}_K(\nu)$ .



**Rys. 2.** (A) Funkcja  $V_{GCV}(\lambda)$ ; (B) Spektrum relaksacji  $H(\nu)$  (12) (linia przerywana) i model  $\hat{H}_K(\nu)$  (linia ciągła); przykład 1

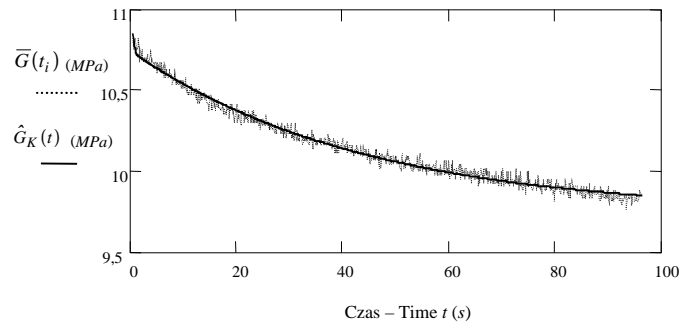
**Fig. 2.** (A)  $GCV$  function  $V_{GCV}(\lambda)$ ; (B) The relaxation spectrum  $H(\nu)$  (12) (dash line) and the model  $\hat{H}_K(\nu)$  (solid line); example 1

**Przykład 2.** Rozważmy ponownie próbkę buraka cukrowego odmiany Janus omawianą w przykładzie 4 z pracy Stankiewicz (2010a) oraz w przykładzie 2 z pracy Stankiewicz (2010b). Przeprowadzono eksperyment opisany w pracy Stankiewicz (2010a). Modelu spektrum relaksacji ponownie (p. przykład 4 w Stankiewicz (2010a)) poszukiwano w liniowej podprzestrzeni przestrzeni  $L^2(0, \infty)$  generowanej przez układ  $K = 10$  funkcji bazowych Laguerre'a. Współczynnik  $\alpha = 5,104$  s dobrano zgodnie ze wskazówkami z Dodatku A. Parametr regularyzacji  $\lambda_{GCV} = 3,5 \cdot 10^{-3}$  dobrano metodą GCV. Wskaźnik jakości modelu  $Q(g^{\lambda_{GCV}}) = 0,6322 \text{ MPa}^2$ ; równocześnie jednak względny błąd aproksymacji pomiarów modułu relaksacji  $\sum_{i=1}^N [\bar{G}(t_i) - \hat{G}_K(t_i)]^2 / [\bar{G}(t_i)^2 N] = 1,362 \cdot 10^{-3}$ . Wyznaczone spektrum relaksacji  $\hat{H}_K(\nu)$  przedstawia rysunek 3. Dokładność dopasowania modelu  $\hat{G}_K(t)$  do pomiarów modułu relaksacji ilustruje rysunek 4.



**Rys. 3.** Model spektrum relaksacji  $\hat{H}_K(\nu)$  próbki buraka cukrowego Janus

**Fig. 3.** Relaxation spectrum model  $\hat{H}_K(\nu)$  of a sample of sugar beet root



**Rys. 4.** Pomiary modułu relaksacji  $\bar{G}(t_i)$  (punkty) oraz model  $\hat{G}_K(t)$  (linia ciągła) – próbka buraka cukrowego Janus

**Fig. 4.** Relaxation modulus measurements  $\bar{G}(t_i)$  (points) and the model  $\hat{G}_K(t)$  (solid line) – the sample of sugar beet root

### UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono schemat optymalnej w sensie najmniejszej sumy kwadratów aproksymacji spektrum częstotliwości relaksacji skończoną sumą funkcji bazowych na podstawie zakłóconych pomiarów modułu relaksacji zgromadzonych w dziedzinie czasu. W konsekwencji pierwotny problem identyfikacji spektrum relaksacji – nieskończone wymiarowy problem optymalizacji dynamicznej – został zredukowany do statycznego zadania optymalizacji liniowo-kwadratowej. Do rozwiązania tego zadania zastosowano technikę regularyzacji Tichonowa wraz z doбором współczynnika regularyzacji metodą uogólnionego sprawdzania krzyżowego, co zapewniło stabilność uzyskanego schematu identyfikacji. Dokładność aproksymacji spektrum relaksacji zależy zarówno od błędów pomiarowych, wartości parametru regularyzacji, jak i odpowiedniego doboru współczynnika funkcji bazowych. Odpowiedni dobór funkcji bazowych pozwala także uniknąć błędów kwadratur numerycznego całkowania występujących w większości znanych algorytmów identyfikacji spektrum relaksacji i retardacji (Paulson i in. 2000). Ma to istotne znaczenie w kontekście źle postawionego problemu odwrotnego. We wcześniejszych pracach autorki (Stankiewicz 2003, 2004, 2005, 2007, 2010d) przeanalizowano dokładność modeli dla zakłóconych pomiarów modułu relaksacji oraz wskazano na liniową zbieżność modelu do modelu, jaki uzyskalibyśmy dla pomiarów idealnych.

### DODATEK A– ALGORYTM LAGUERRE'A

Funkcje Laguerre'a są użytecznym narzędziem modelowania matematycznego (Campelloa i in. 2004), są wykorzystywane w konstrukcji uniwersalnych ortogonalnych algorytmów identyfikacji systemów (Lecchinia i Gevers 2004), jak i algorytmów identyfikacji adresowanych do konkretnych zastosowań, np. w biologii (Marmarelis 1993) czy geofizyce materiałów o własnościach lepkosprężystych (Mikhailenko i in. 2003). Stosowane są w algorytmach przetwarzania sygnałów (Yuan 2007) oraz w syntezie algorytmów sterowania (Veena i Narasimhan 2004).

Funkcje Laguerre'a  $l_k(v)$  dane są szeregi funkcyjnymi (Szabatin 1982)

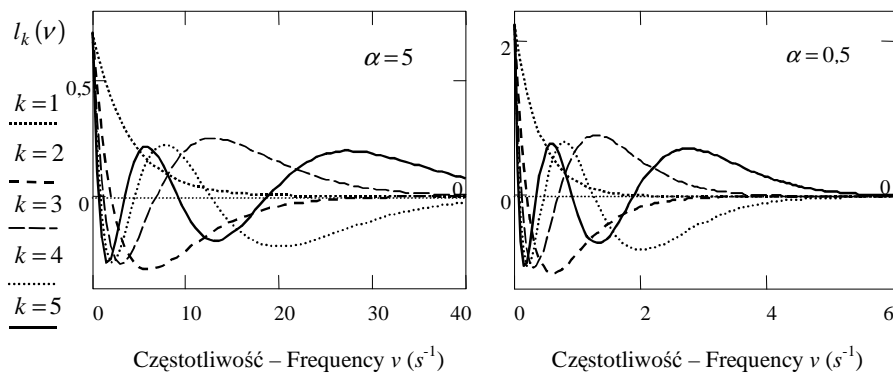
$$l_k(v) = (-1)^{k-1} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha v/2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{(-\alpha v)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}, \quad k=1,2,\dots \quad (\text{A.1})$$

i tworzą zupełny układ funkcji ortonormalnych w  $L^2(0,\infty)$ . Dodatni parametr  $\alpha$  to współczynnik skali czasu (ang. *time scaling factor*). Funkcje  $\phi_k(t)$  (7) dla funkcji Laguerre'a (A.1) są postaci (p. dodatek C.7 rozprawy Stankiewicz (2007))

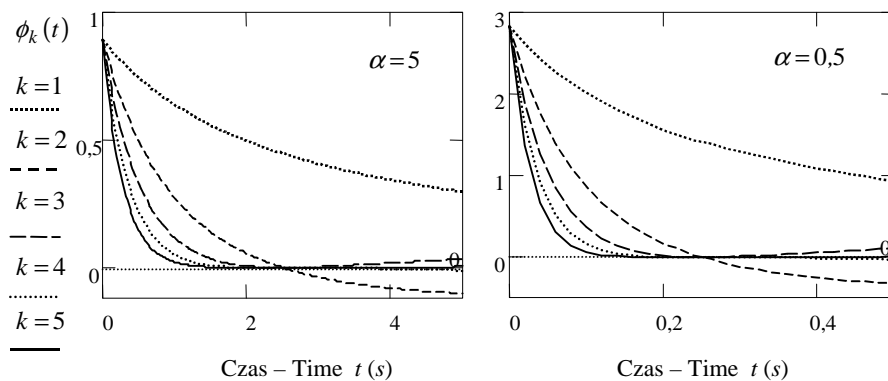


$$\phi_k(t) = (-1)^{k-1} 2\sqrt{\alpha} \frac{(2t-\alpha)^{k-1}}{(2t+\alpha)^k}, \quad k=1,2,\dots \quad (\text{A.2})$$

Przebieg kilku pierwszych funkcji bazowych  $l_k(\nu)$  oraz funkcji  $\phi_k(t)$  dla dwu różnych wartości współczynnika  $\alpha$  przedstawiają, odpowiednio, rysunki 5 i 6.



**Rys. 5.** Funkcje bazowe Laguerre'a  $l_k(\nu)$  dla parametrów  $\alpha=5$  i  $\alpha=0,5$ ,  $k=1,2,3,4,5$   
**Fig. 5.** The Laguerre basic functions  $l_k(\nu)$  for parameters  $\alpha=5$  and  $\alpha=0,5$ ,  $k=1,2,3,4,5$



**Rys. 6.** Funkcje  $\phi_k(t)$  dla algorytmu Laguerre'a; parametry  $\alpha=5$  oraz  $\alpha=0,5$ ,  $k=1,2,3,4,5$   
**Fig. 6.** Functions  $\phi_k(t)$  of the Laguerre algorithm, parameters  $\alpha=5$  and  $\alpha=0,5$ ,  $k=1,2,3,4,5$

Łatwo zauważyć, że im większą wartość przyjmuje parametr  $\alpha$ , tym mniejsze są częstotliwości, czyli większe czasy relaksacji. Analizując przebieg funkcji bazowych  $\phi_k(t)$  łatwo stwierdzić, że odpowiadają one typowym przebiegom modułu relaksacji rejestrowanym doświadczalnie. Zgrubna strategia doboru współ-

czynnika  $\alpha$  bazuje na porównaniu, dla różnych wartości stałej  $\alpha$ , uzyskanych eksperymentalnie przebiegów czasowych modułu relaksacji  $G(t)$  oraz kilku pierwszych funkcji ciągu  $\{\phi_k(t)\}$ . W ten sposób można także wstępnie oszacować liczbę  $K$  składników szeregu funkcyjnego (6). Oznacza to, że zarówno wybór liczby  $K$  składników modelu (5), jak i parametru  $\alpha$  należy przeprowadzić *a posteriori* po wstępnej analizie wyników eksperymentu.

#### PIŚMIENNICTWO

- Campello R. J. G. B., Faviera G., do Amaral W. C., 2004. Optimal expansions of discrete-time Volterra models using Laguerre functions. *Automatica*, 40, 815-822.
- Golub G. H., Heath M.T., Wahba G., 1979. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21, 215-223.
- Groetsch C. W., 1993. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg Publishing, Wiesbaden.
- Lecchinia A., Gevers M., 2004. Explicit expression of the parameter bias in identification of Laguerre models from step responses. *Systems & Control Letters* 52(2), 149-165.
- Marmarelis V. Z., 1993. Identification of nonlinear biological systems using Laguerre expansions of kernels. *Ann. Biomed.* 21, 573-589.
- Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V., 2003. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the laguerre spectral method. *Pure and Applied Geophysics*, 160, 1207-1224.
- Nguyen N., Milanfar P., Golub G., 2001. A computationally efficient superresolution image reconstruction algorithm. *IEEE Trans. Image Processing*, 10(4), 573-583.
- Paulson K.S., Jouravleva S., McLeod C.N., 2000. Dielectric Relaxation Time Spectroscopy. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 47, 1510-1517.
- Rao M.A., 1999. *Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications*. Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland.
- Stankiewicz A., 2003. Algorytm identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji biologicznych materiałów lepkosprężystych. *Acta Scientiarum Polonorum, Seria Technica Agraria*, 2(2), 77-91.
- Stankiewicz A., 2004. Metoda identyfikacji spektrum relaksacji materiałów lepkosprężystych. *Problemy Eksploatacji* 52, 121-133.
- Stankiewicz A., 2005. Algorytm aproksymacji spektrum retardacji roślinnych materiałów lepkosprężystych funkcjami Legendre'a. *Acta Agrophysica*, 6(3), 795-813.
- Stankiewicz A., 2007. Identyfikacja spektrum relaksacji lepkosprężystych materiałów roślinnych. *Rozprawa doktorska, Akademia Rolnicza w Lublinie, Lublin*.
- Stankiewicz A., 2010a. O źle i dobrze postawionych problemach identyfikacji modeli roślinnych materiałów lepkosprężystych. *Acta Agrophysica*, 16(1), strony ja wpiszę
- Stankiewicz A., 2010b. Jak dobrze postawić problem identyfikacji modelu Maxwella roślinnych materiałów lepkosprężystych. *Acta Agrophysica*, 16(1), strony ja wpiszę
- Stankiewicz A., 2010c. On the existence and uniqueness of the relaxation spectrum of viscoelastic materials. Part II: Other existence conditions. *TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture*, 10, 388-395.

- Stankiewicz A., 2010d. Identification of the relaxation and retardation spectra of plant viscoelastic materials using Chebyshev functions. TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture, 10, Part I. Identification algorithm, 363-371; Part II. Analysis, 372-378; Part III. Numerical studies and application example, 396-404.
- Szabatin J., 1982. Podstawy teorii sygnałów. Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Tikhonov A. N., Arsenin V. Y., 1977. Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York.
- Veena S., Narasimhan S. V., 2004. Improved active noise control performance based on Laguerre lattice. Signal Processing 84, 695-707.
- Yuan J., 2007. Adaptive Laguerre filters for active noise control. Applied Acoustics, 68, 86-96.

## HOW TO WELL FORMULATE THE PROBLEM OF RELAXATION SPECTRUM IDENTIFICATION OF VISCOELASTIC PLANT MATERIALS

*Anna Stankiewicz*

Department of Technical Science, University of Life Sciences  
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin  
e-mail: anna.stankiewicz@up.lublin.pl

**Abstract.** As it was emphasized in the first part of this paper, the problem of relaxation spectrum determination is the practical problem of reconstructing the solution of Fredholm integral equation of the first kind of convolution type from time-measured data. This problem is known to be severely *ill-posed*. This means that in particular small changes in measured relaxation modulus can lead to arbitrarily large changes in the relaxation spectrum. In remedy, some reduction of the admissible solutions set or respective regularization of the original problem can be used. In this paper both the techniques are used simultaneously. A finite-dimensional approximation of the spectrum by the linear combination of orthogonal functions is combined with Tikhonov regularization. A resulting simple identification scheme is outlined. The effectiveness of the method is demonstrated through the computation of the relaxation spectrum of a sugar beet root sample in the state of uniaxial strain. A numerical example of determining the Gaussian relaxation spectrum is also enclosed.

**Keywords:** viscoelasticity, relaxation spectrum, ill-posed problem, regularization